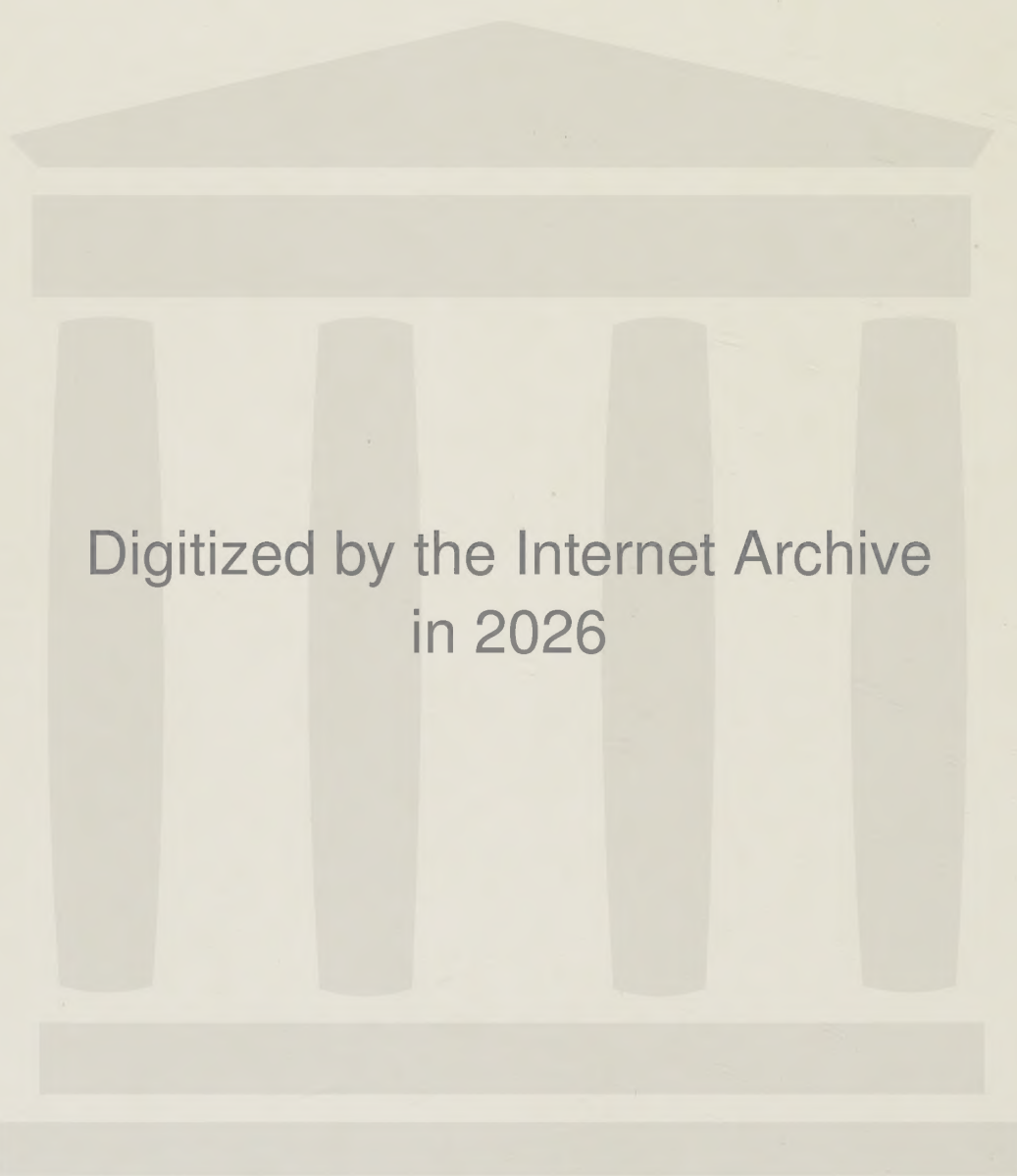


L. v. Bernus

Frankfurt a. M. 1978



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550820_0041

ZWEIZENTRENFREIHEITSGRADE
IN EINEM KOLLEKTIVEN KERNMODELL

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades des Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der Johann Wolfgang
Goethe-Universität zu Frankfurt am Main

von

Ludwig von Bernus
aus Bad Soden/Taunus

Frankfurt am Main

1978



Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan:	Prof. Dr. R. Jelitto
Erster Gutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. J. Maruhn

Tag der mündlichen Prüfung: 14. März 1978

I n h a l t

A. Einleitung	1
B. Das Modell	2
1) Die Koordinaten	3
2) Volumen- und Schwerpunkterhaltung	4
3) Symmetrien	5
4) Der Hamiltonoperator	7
5) Beziehung zwischen den Koordinaten des Modells und Multipolkoordinaten	13
6) Günstige Koordinaten für den Fall gleichgroßer Fragmente und kleiner Relativabstände	20
C. Lösung der Schrödingergleichung	26
1) Die Basiswellenfunktionen	26
a) Die Relativkoordinate	27
b) Die Massenasymmetriekoordinate	28
c) Die Quadrupolkoordinate	31
d) Die Produktwellenfunktion und ihre Symmetrien	33
2) Die Matrixelemente	37
3) Der Quadrupoloperator	39
D. Diskussion der Ergebnisse	44
1) Quadrupolschwingungen mit hohem Drehimpuls	44
a) ^{192}Os	45
b) Backbending	46
c) ^{238}U	47
2) Ergebnisse des dynamischen Zweizentrenmodells	48
a) Die Kopplungsterme	48
b) Gekoppelte Rotatoren	51
c) Rechnungen mit den Koordinaten α^+ , α^- und $\vec{r}$	54
1. Konstruktion der Basis	54
2. Kopplung eines α^+ -Rotators, α^- - und $\vec{r}$ -Vibrators	56
3. Kopplung eines α^+ -Rotators mit α^- - und $\vec{r}$ - Rotatoren, deren Trägheitsmomente klein sind	58
d) Zusammenfassung	61
3) Ausblick	62

Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag zur kollektiven Beschreibung der Dynamik von Atomkernen geliefert werden. Bisher wurden in der Streutheorie einerseits und zur Beschreibung des Niederenergiebereichs andererseits unterschiedliche Koordinaten verwendet. Wir wollen versuchen, ein Modell zu konstruieren, welches in einer einheitlichen Parametrisierung vom Grundzustand bis zum Fall zweier getrennter Fragmente die wichtigsten Kernformen erfasst.

Bei der Wahl der Koordinaten gehen wir von der Situation zweier Bruchstücke bzw Streupartner aus. Daraus ergibt sich notwendigerweise die Einführung einer Relativkoordinate und zweier intrinsischer Koordinaten. Wollen wir mit der gleichen Parametrisierung dem Niederenergiebereich gerecht werden, so müssen wir herausfinden, wie man mit den Koordinaten zweier Fragmente einen einzelnen stabilen sphärischen oder deformierten Kern beschreiben kann. Darin liegt eine zentrale Aufgabe dieser Arbeit. Eng damit verbunden ist die Frage, wie sich die zusätzlichen Freiheitsgrade im Vergleich zu den bisherigen Kollektivmodellen (1,2,3,4,5,6,7) auswirken, welche sich im allgemeinen auf die fünf Quadrupolfreiheitsgrade beschränken.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Zuerst wird das Modell in seinen grundsätzlichen Eigenschaften diskutiert. Dann folgt eine Darstellung der Lösungsmethode. Am Schluss finden sich die Ergebnisse und ihre Interpretation.

DAS MODELL

Wir beginnen mit der Definition der Koordinaten. Damit verbunden ist die Frage der Volumenerhaltung. Um den Hamiltonoperator konstruieren zu koennen befassen wir uns mit den Symmetrieen unseres Modells. Schliesslich wird die Frage diskuiert, wie unsere Koordinaten die Bewegung eines Kerns im Niederenergiebereich beschreiben koennen.

DIE KOORDINATEN

Die Wahl der Koordinaten orientiert sich an der Arbeit von A. Kappatsch (8). Die Deformationen der beiden Cluster werden durch voneinander unabhängige Quadrupolkoordinaten $\alpha_{1\mu}^{[2]}$, $\alpha_{2\mu}^{[2]}$ beschrieben, wie sie von Bohr definiert wurden:

$$R_i(\vartheta_i, \varphi_i) = R_i^0 \left(1 + \sum_{\mu} (-)^{\mu} \alpha_{i-\mu}^{[2]} Y_{\mu}^2(\vartheta_i, \varphi_i) \right), \quad R_i^0 = 1.22 A_i^{1/3}$$

Ausserdem benoetigt man noch einen Vektor $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$, der den Abstand der beiden Teilsysteme angibt. Die Radien R_1 und R_2 werden vom Anfangs- bzw Endpunkt von $\vec{r}$ aus gemessen. Die Kernform ist durch die einhuellende Flaechе der beiden Ellipsoide R_1 und R_2 definiert, wie dies in Figur 1 dargestellt ist.

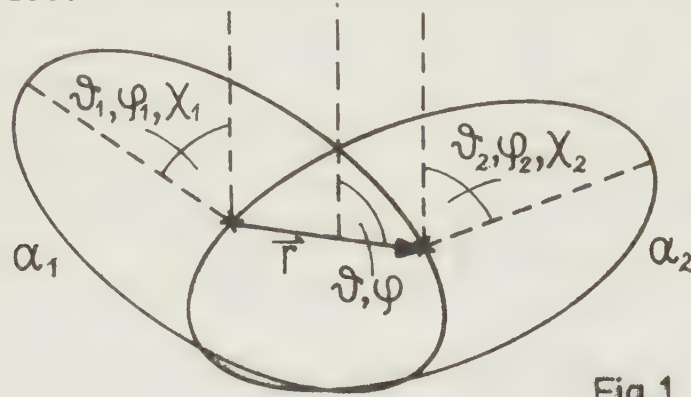


Fig.1

Hier sind als Alternative zu $\alpha_{1\mu}^{[2]}$, $\alpha_{2\mu}^{[2]}$ die Koordinaten $(\beta_1, \gamma_1, \vartheta_1, \varphi_1, \chi_1)$ und $(\beta_2, \gamma_2, \vartheta_2, \varphi_2, \chi_2)$ eingezeichnet. Die Winkel $\vartheta_i, \varphi_i, \chi_i$ bestimmen die Lage der Hauptachsen der Ellipsoide im Laborsystem, waehrend β_i und γ_i die Deformation angeben. Die Relation zwischen diesen beiden Koordinatensatzen lautet:

$$\alpha_{i\mu}^{[2]} = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^{[2]}(\varphi_i, \vartheta_i, \chi_i) \alpha_{i\nu}^{[2]} \quad (B.2)$$

$$\alpha_{i1}^{[2]} = \alpha_{i-1}^{[2]} = 0; \quad \alpha_{i2}^{[2]} = \alpha_{i-2}^{[2]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_i \sin \gamma_i; \quad \alpha_{i0}^{[2]} = \beta_i \cos \gamma_i.$$

Will man noch die Dynamik des Massenaustauschs zwischen den beiden Teilsystemen behandeln, so kann man eine Koordinate η einfuehren:

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad \text{bzw} \quad \eta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (B.3)$$

$$\text{mit } A_1 + A_2 = A \quad \text{bzw} \quad m_1 + m_2 = m.$$

Bei der Definition der Koordinaten ist es angebracht, die Erhaltung von Volumen und Schwerpunkt zu bedenken. Dabei gibt es im Rahmen dieses Modells zwei Möglichkeiten. Die einfachste Methode der Volumen und Schwerpunkterhaltung besteht darin, zusätzliche Koordinaten einzuführen, nämlich eine für die Volumenerhaltung und drei für die Schwerpunkterhaltung und diese Koordinaten durch die vier Gleichungen

$$V = \text{const} \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{S} = 0 \quad (\text{B.5})$$

festzulegen. Die vier zusätzlichen Koordinaten garantieren bei völliger freier Wahl der dynamischen Koordinaten, dass Volumen und Schwerpunkt erhalten bleiben. Dadurch verlieren die dynamischen Koordinaten ihre direkte geometrische Bedeutung, die Kernform wird nicht mehr durch die einhüllende Fläche der beiden Ellipsoide R_1 und R_2 in Figur 1 definiert, sondern eine geometrische Modifikation der Oberfläche findet statt. Diese Methode soll im Rahmen dieses Modells daher geometrische Volumen- bzw. Schwerpunkterhaltung heissen. Sie tritt immer erst dann in Erscheinung, wenn geometrische Größen, wie zum Beispiel der Quadrupoloperator oder der mittlere quadratische Radius ausgerechnet werden sollen, so auch in dieser Arbeit im Kapitel C.3).

Die andere Methode besteht darin, den Hamiltonoperator durch Zusatzpotentiale so zu modifizieren, dass volumen- bzw. schwerpunktverändernde Schwingungen erschwert werden. In diesem Fall kann man also von dynamischer Volumenerhaltung sprechen. Der wesentlichste Unterschied zur geometrischen Volumenerhaltung besteht darin, dass Freiheitsgrade "eingefroren" d.h. erst bei hohen Energien wirksam werden und zwar im Fall der Volumenerhaltung ein Freiheitsgrad und im Fall der Schwerpunkterhaltung drei Freiheitsgrade. Ein Beispiel dynamischer Volumenerhaltung findet sich im Kapitel B.5).

Bevor der Hamiltonoperator konstruiert werden kann, ist es wichtig, zu wissen, welche Symmetrien das Gesamtsystem hat und wie die entsprechenden Symmetrietransformationen in den Koordinaten ausgedrueckt werden koennen.

Als erstes fordern wir Rotationsinvarianz. Die Transformationseigenschaften der Koordinaten unter Drehung sind bekannt. Die Koordinaten sind sphaerische Tensoren zweiter Stufe, der Relativvektor $\vec{r}$ laesst sich als sphaerischer Tensor erster Stufe schreiben

$$\tau^{[1]} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_0 \\ \tau_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \tau \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \quad (B.6)$$

und die Koordinate η ist ein Skalar. Es lassen sich daher ohne Schwierigkeiten rotationsinvariante Funktionen dieser Koordinaten konstruieren.

Die Paritaetstransformation, welche als naechtestes betrachtet werden soll, ist als Spiegelung am Ursprung definiert. Die Auswirkung dieser Transformation auf die Koordinaten ergibt sich auch in diesem Fall aus ihren Tensoreigenschaften. Die Paritaet von sphaerischen Tensoren der Stufe 1 ist gegeben durch

$$P T_{\mu}^{[e]} P^{-1} = (-)^e T_{\mu}^{[e]} \quad (B.7)$$

wobei P der Paritaetsoperator ist. Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} P \alpha_{i\mu}^{[2]} P^{-1} &= \alpha_{i\mu}^{[2]} \\ P \tau_{\mu}^{[1]} P^{-1} &= -\tau_{\mu}^{[1]} \\ P \eta^{[0]} P^{-1} &= \eta^{[0]} \end{aligned} \quad (B.8)$$

Dabei spielt es keine Rolle, dass die Oberflaechen der beiden Teilfragmente nicht um den Ursprung sondern um die beiden Punkte $\pm 1/2 \vec{r}$ entwickelt werden.

Dies soll kurz erlaeutert werden. Beschreibt man jeden Punkt der Kernoberflaeche durch einen Vektor $\vec{R}$, den Abstand des Kernzentrums vom Ursprung mit $\vec{r}$ und fuehrt einen Vektor $\vec{r}'$ ein, der die Oberflaeche in der ueblichen Weise vom Kernzentrum aus abtastet (Fig 2),

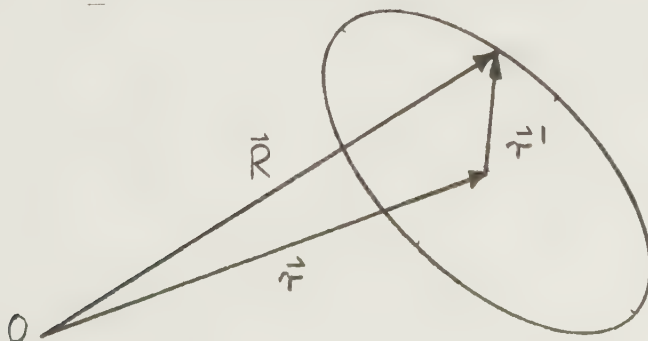


Fig. 2

so gilt

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' \quad (B.9)$$

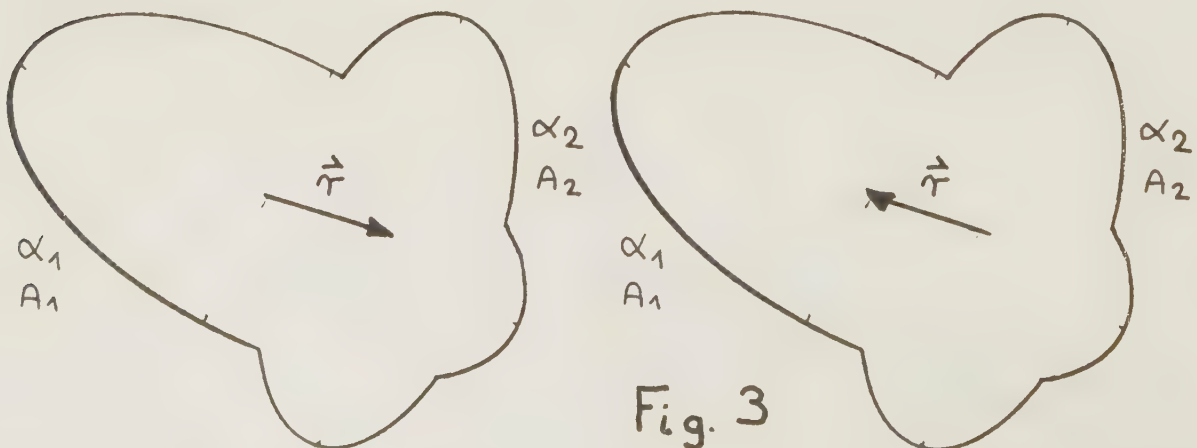
Die Paritaetstransformation ueberfuehrt $\vec{R}$ in $-\vec{R}$, $\vec{r}$ in $-\vec{r}$ und $\vec{r}'$ in $-\vec{r}'$. Der Vorzeichenwechsel von $\vec{r}$ bewirkt eine Translation des Kerns, die nicht in Betracht gezogen werden muss, da die α_i^2 immer auf das Kernzentrum bezogen sind. Die Vorzeichenumkehr von $\vec{r}'$ dagegen ist die bekannte Paritaetstransformation, bei der der Koordinatenursprung im Kernzentrum liegt.

Ausser Rotations- und Paritaetsinvarianz gibt es in unserem Fall noch eine weitere Symmetrie, die durch die spezielle Wahl der Koordinaten begruendet ist. Wie man sich anhand von Figur 3 ueberzeugen kann, wird die gleiche Kernoberflaeche von zwei verschiedenen Saetzen von Koordinaten beschrieben. Fragment 1 hat die Deformation α_1 , die Nukleonenzahl A_1 und sein Zentrum hat den Ortsvektor $\vec{r}_1$, Fragment 2 hat die Deformation α_2 , die Nukleonenzahl A_2 und den Ortsvektor $\vec{r}_2$. Der Relativabstand der beiden Fragmente ist $\vec{r}$. Vertauscht man saemtliche Koordinaten der beiden Fragmente,

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 \longrightarrow \tau_2 \\ \tau_2 \longrightarrow \tau_1 \\ \alpha_1 \longrightarrow \alpha_2 \\ \alpha_2 \longrightarrow \alpha_1 \\ A_1 \longrightarrow A_2 \\ A_2 \longrightarrow A_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{r} \longrightarrow -\vec{r} \\ \eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \longrightarrow -\eta \end{array} \quad (B.10)$$

so bleibt die Oberflaechengestalt erhalten. Dies muss bei der Konstruktion des Hamiltonoperators beachtet werden, denn die Gesamtenergie darf sich nicht aendern, wenn bei einer Koordinatenvertauschung die Oberflaeche die gleiche bleibt.

Der Vollstaendigkeit halber soll als letztes noch die Zeitumkehrinvarianz erwaeht werden. Die Zeitumkehr wirkt in bekannter Weise auf die Impulsoperatoren, indem deren Vorzeichen umgekehrt wird.



Da bisher keine ausreichende mikroskopische Begründung fuer eine bestimmte Gestalt des Hamiltonoperators vorliegt, wollen wir so vorgehen, dass zunaechst einmal ein moeglichst allgemeiner Ansatz gesucht wird, der die oben geforderten Symmetrien erfuehlt. Selbstverstaendlich leidet darunter die Anschaulichkeit, da es unmoeglich ist, Potentiale als Funktionen von mehr als zwei Koordinaten anders, als durch Schnitte darzustellen. Daher wird man sich bei den numerisch durchgerechneten Beispielen auf solche beschraenken, die eine verstaendliche, physikalisch deutbare Auswirkung auf die Dynamik haben.

Die Asymmetriekoordinate (B 3) wird in der allgemeinen Diskussion des Hamiltonoperators mitberuecksichtigt, jedoch spaeter aus Gruenden der numerischen Oekonomie weggelassen.

Der Hamiltonoperator wird in seiner Grundstruktur folgendermassen angesetzt:

$$H = H_1(\alpha_1) + H_2(\alpha_2) + H_{rel}(\vec{r}) + H_{asy}(\eta) + H_{kop}(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \eta). \quad (B.11)$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Funktionen H_1, H_2 und H_{kop} sich als Polynome bezueglich der α_i darstellen lassen. Dies bedeutet eine gewisse Einschraenkung, zum Beispiel kann der Term

$$\sqrt{[\alpha_i \times \alpha_i]^{[0]}} \quad (B.12)$$

nicht entwickelt werden (6).

Fuer H_1 und H_2 wird der bekannte Hamiltonoperator von G. Gneuss (4) verwendet. H_{rel} beschreibt die Relativbewegung zweier Massenpunkte und H_{asy} die eindimensionale Bewegung der Asymmetriekoordinate. Es wird vorausgesetzt, dass H_{rel} und H_{asy} ebenso, wie H_1 und H_2 der Zeitumkehr-, Rotations- und Paritaetsinvarianz genuegen.

H_{kop} laesst sich in der folgenden Form entwickeln: (B.13)

$$H_{kop} = \sum_{i,j,k,m,j_{12}} C_{i,j,k,m,j_{12}} \left[P_i^{[e_i]}(\alpha_1) \times P_j^{[e_j]}(\alpha_2) \right]^{[j_{12}]} \times R_k(\vec{r}) \Big]^{[0]} \cdot F_m(\eta).$$

Dabei sind $P_n^{e_n}$ Polynome der α_i und im allgemeinen auch der Impulse π_i . Diese Polynome koennen genauso klassifiziert werden, wie die Wellenfunktionen des 5-dimensionalen harmonischen Oszillators, die ja auch aus Polynomen von Erzeugungsoperatoren bestehen, welche auf das Vakuum angewandt werden (8). Der Index dient der Abzaehlung. Im allgemeinen koennen fuer verschiedene n gleiche l_n vorkommen. Hier die ersten 5:

n	e_n	$\rho_n^{[e_n]}$
1	0	1
2	2	$\alpha_i^{[2]}$
3	0	$[\alpha_i^{[2]} \times \alpha_i^{[2]}]^{[0]}$
4	2	$[\alpha_i^{[2]} \times \alpha_i^{[2]}]^{[2]}$
5	4	$[\alpha_i^{[2]} \times \alpha_i^{[2]}]^{[4]}$

(B.14)

$R_k^{j_{12}}(\vec{r})$ und $E_m(\eta)$ sind beliebige vollstaendige Funktionensysteme. Auch diese koennen unter Beachtung der Zeitumkehrinvarianz von den Impulsen abhaengen.

Die Rotationsinvarianz ist bei dem Ansatz (B 13) von vorneherein gewaehrleistet. Bei Paritaetstransformationen wird nur der Faktor $R_k^{j_{12}}$ betroffen. Da es sich um einen irreduziblen Tensor der Drehgruppe handelt, gilt:

$$P R_k^{[j_{12}]}(\vec{r}) P^{-1} = R_k^{[j_{12}]}(-\vec{r}) = (-)^{j_{12}} R_k^{[j_{12}]} . \quad (B.15)$$

Daraus ergibt sich, dass nur gerade j_{12} vorkommen duerfen.

Etwas schwieriger ist zu sehen, wie sich die Symmetrie gegenueber (B 10) in der Gestalt des Hamiltonoperators niederschlaegt. Gegeben sei ein Operator $\mathcal{O}$, der die Transformation (B 10) bewirkt:

$$\mathcal{O}: \begin{cases} \vec{r} \longrightarrow -\vec{r} \\ \alpha_1 \longrightarrow \alpha_2, \quad \pi_1 \longrightarrow \pi_2 \\ \alpha_2 \longrightarrow \alpha_1, \quad \pi_2 \longrightarrow \pi_1 \\ \eta \longrightarrow -\eta \end{cases} \quad (B.16)$$

Man erhaelt einen moeglichst allgemeinen gegenueber $\mathcal{O}$ invarianten Hamiltonoperator $\tilde{H}$ folgendermassen:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (H + \mathcal{O} H \mathcal{O}^{-1}) . \quad (B.17)$$

Fuehrt man dies durch und sortiert symmetrische und antisymmetrische Anteile, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} = & \frac{1}{2} H_1(\alpha_1) + \frac{1}{2} H_2(\alpha_1) + \frac{1}{2} H_1(\alpha_2) + \frac{1}{2} H_2(\alpha_2) + \frac{1}{2} H_{rel}(\vec{r}) + \frac{1}{2} H_{rel}(-\vec{r}) \\
& + H_{asy}(\eta) + H_{asy}(-\eta) \\
& + \sum_n C_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\left[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2) \right]^{[j_{12}]} + \left[P_i^{e_i}(\alpha_2) \times P_j^{e_j}(\alpha_1) \right]^{[j_{12}]} \right) \times R_k^{j_{12}}(\vec{r}) \right\}^{[0]} \\
& \cdot [F_m(\eta) + F_m(-\eta)] \\
(B.18) \quad & + \frac{1}{4} \left(\left[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2) \right]^{[j_{12}]} + \left[P_i^{e_i}(\alpha_2) \times P_j^{e_j}(\alpha_1) \right]^{[j_{12}]} \right) \times R_k^{j_{12}}(\vec{r}) \right\}^{[0]} \\
& \cdot [F_m(\eta) - F_m(-\eta)] \\
n = & (i, j, k, m, j_{12}) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mit} \quad H_\alpha(\alpha_1) &= \frac{1}{2} (H_1(\alpha_1) + H_2(\alpha_1)) \\
H_\alpha(\alpha_2) &= \frac{1}{2} (H_1(\alpha_2) + H_2(\alpha_2)) \\
H_r(\vec{r}) &= \frac{1}{2} (H_{rel}(\vec{r}) + H_{rel}(-\vec{r})) = H_{rel}(\vec{r}) \\
H_\eta(\eta) &= \frac{1}{2} (H_{asy}(\eta) + H_{asy}(-\eta)) = H_{asy}(\eta) \\
S_{ij}^{[j_{12}]}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{1}{2} \left(\left[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2) \right]^{[j_{12}]} + \left[P_i^{e_i}(\alpha_2) \times P_j^{e_j}(\alpha_1) \right]^{[j_{12}]} \right) \\
(B.19) \quad A_{ij}^{[j_{12}]}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{1}{2} \left(\left[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2) \right]^{[j_{12}]} - \left[P_i^{e_i}(\alpha_2) \times P_j^{e_j}(\alpha_1) \right]^{[j_{12}]} \right) \\
S_m(\eta) &= \frac{1}{2} (F_m(\eta) + F_m(-\eta)) \\
A_m(\eta) &= \frac{1}{2} (F_m(\eta) - F_m(-\eta))
\end{aligned}$$

laesst sich H uebersichtlicher schreiben:

$$\tilde{H} = H_{\alpha}(\alpha_1) + H_{\alpha}(\alpha_2) + H_{\tau}(\vec{\tau}) + H_{\eta}(\eta) + \\ + \sum_n C_n \left\{ [S_{ij}^{\dot{j}_{12}} \times R_k^{\dot{j}_{12}}]^{[0]} \cdot S_m + [A_{ij}^{\dot{j}_{12}} \times R_k^{\dot{j}_{12}}]^{[0]} \cdot A_m \right\} .$$

(B. 20)

Beachtenswert ist, dass die intrinsischen Hamiltonoperatoren $H_{\alpha}(\alpha_1)$ und $H_{\alpha}(\alpha_2)$ sich voellig gleichen (B 19). Die symmetrischen Funktionen $S_{ij}^{\dot{j}_{12}}(\alpha_1, \alpha_2)$, $S_m(\eta)$ und die antisymmetrischen Funktionen $A_{ij}^{\dot{j}_{12}}(\alpha_1, \alpha_2)$, und $A_m(\eta)$ treten jeweils zusammen im Produkt auf, so dass die Symmetrie gegenueber (B 10) gewahrt bleibt.

Der Hamiltonoperator $\tilde{H}$ (B 20) soll nun als Ausgangspunkt fuer Vereinfachungen dienen, die im Hinblick auf numerische Rechnungen unumgaenglich sind. Insbesondere lassen sich aus (B 20) ohne Schwierigkeiten die generellen Formen von Hamiltonoperatoren einfacherer Modelle ableiten. Nimmt man zum Beispiel an, dass η konstant sei, so erhaelt man fuer $\eta=0$ den Fall zweier gleicher und fuer $\eta \neq 0$ den Fall zweier ungleicher Fragmente, die sich umeinander bewegen. Im ersten Fall verschwindet der Term mit den antisymmetrischen Faktoren, denn

$$A_m(\eta=0) = 0.$$

Der Hamiltonoperator hat dann folgende allgemeinste Form:

$$\tilde{H}(\alpha_1, \alpha_2, \vec{\tau}) = H_{\alpha}(\alpha_1) + H_{\alpha}(\alpha_2) + H_{\tau}(\vec{\tau}) + \\ + \sum_{i,j,k,\dot{j}_{12}} K_{ijk\dot{j}_{12}} [S_{ij}^{\dot{j}_{12}}(\alpha_1, \alpha_2) \times R_k^{\dot{j}_{12}}(\vec{\tau})]^{[0]} \\ \text{mit } K_{ijk\dot{j}_{12}} = \sum_m C_{ikm\dot{j}_{12}} S_m(0) . \quad (B. 21)$$

Im Fall $\eta \neq 0$ muss man den asymmetrischen Term beibehalten:

$$\tilde{H}(\alpha_1, \alpha_2, \vec{\tau}) = H_{\alpha}(\alpha_1) + H_{\alpha}(\alpha_2) + H_{\tau}(\vec{\tau}) + \\ + \sum_{i,j,k,\dot{j}_{12}} \left\{ K_{ijk\dot{j}_{12}}^S [S_{ij}^{\dot{j}_{12}}(\alpha_1, \alpha_2) \times R_k^{\dot{j}_{12}}(\vec{\tau})]^{[0]} + \right. \\ \left. + K_{ijk\dot{j}_{12}}^A [A_{ij}^{\dot{j}_{12}}(\alpha_1, \alpha_2) \times R_k^{\dot{j}_{12}}(\vec{\tau})]^{[0]} \right\}$$

$$\text{mit } K_{ij, k, j_{12}}^S = \sum_m C_{ijk} m_{j_{12}} S_m(\eta_0)$$

$$\text{und } K_{ij, k, j_{12}}^A = \sum_m C_{ijk} m_{j_{12}} A_m(\eta_0)$$

Die Gleichheit von $H_\alpha(\alpha_1)$ und $H_\alpha(\alpha_2)$ hat in diesem Fall nur formale Bedeutung. Man kann naemlich folgende neuen intrinsichen Hamiltonoperatoren $\tilde{H}_1(\alpha_1)$ und $\tilde{H}_2(\alpha_2)$ definieren:

$$\tilde{H}_1(\alpha_1) = H_\alpha(\alpha_1) + \sum_{ij, k, j_{12}} K_{ij, k, j_{12}}^A [A_{ij}^{j_{12}}(\alpha_1, 0) \times R_k^{j_{12}}(0)]^{[0]}$$

$$\tilde{H}_2(\alpha_2) = H_\alpha(\alpha_2) + \sum_{ij, k, j_{12}} K_{ij, k, j_{12}}^A [A_{ij}^{j_{12}}(0, \alpha_2) \times R_k^{j_{12}}(0)]^{[0]}.$$

(B.23)

Dann erhaelt H folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}) = & \tilde{H}_1(\alpha_1) + \tilde{H}_2(\alpha_2) + H_T(\vec{r}) + \\ & + \sum_n \left\{ K_n^S [S_{ij}^{j_{12}}(\alpha_1, \alpha_2) \times R_k^{j_{12}}(\vec{r})]^{[0]} + \right. \\ & + K_n^A ([A_{ij}^{j_{12}}(\alpha_1, \alpha_2) \times R_k^{j_{12}}(\vec{r})]^{[0]} - \\ & \left. - [(A_{ij}^{j_{12}}(\alpha_1, 0) + A_{ij}^{j_{12}}(0, \alpha_2)) \times R_k^{j_{12}}(0)]^{[0]}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\text{mit } n = (ij, k, j_{12}) .$$

Auf diese Weise werden alle Terme, die nur α_1 bzw. nur α_2 enthalten aus dem antisymmetrischen Anteil der Kopplung aussortiert. Die Terme von $\tilde{H}_{kop}$, welche dann noch uebrig bleiben, bestehen aus Produkten von Polynomen, in welchen mindestens zwei der Koordinaten α_1, α_2 und $\vec{r}$ enthalten sind, also aus 'echten' Kopplungsgliedern. Die Operatoren $\tilde{H}_1$ und $\tilde{H}_2$ haben jetzt unterschiedliche Gestalt und repraesentieren die beiden Fragmente unterschiedlicher Massenzahl.

BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN KOORDINATEN DES MODELLS UND MULTIPOLKOORDINATEN

Bei der Formulierung des Modells wurden die Koordinaten so gewaehlt, wie man sie von Spalt- bzw. Fusionsmodellen kennt. Fuer grosse Relativabstaende ist der physikalische Sinn dieser Koordinaten einleuchtend, schwierig wird es jedoch bei kleinen Relativabstaenden. Kleine Quadrupoldeformationen lassen sich kaum unterscheiden von kleinen Auslenkungen in der Relativkoordinate. Ausserdem ist bekannt, dass zur Beschreibung der Kernformen im Niederenergiebereich im allgemeinen die 5 Quadrupolkoordinaten ausreichen. In unserem Modell verwenden wir dagegen zwei mal 5 Quadrupolkoordinaten und die dreikomponentige Relativkoordinate, das heisst es treten 8 zusaetzliche Koordinaten auf, welche zur Beschreibung der Zustaende des Niederenergiebereichs nicht benoetigt werden. Daher wuenscht man sich, dass diese zusaetzlichen Koordinaten erst bei den Zustaenden in Erscheinung treten, die anders als quadrupolfoermig deformiert sind.

Ein Weg, die Freiheitsgrade im unteren Energiebereich zu beschraenken, bestuende darin, Zwangspotentiale einzufuehren. Man kann versuchen, solche Potentiale mikroskopisch zu berechnen oder auf intuitive Weise zu konstruieren, indem man Kombinationen von Kopplungstermen sucht, die bestimmte Schwingungen behindern. Zum Beispiel kann man bei niedriger Energie den Relativfreiheitsgrad einfrieren und Deckungsgleichheit der dann uebereinanderliegenden Oberflaechen der beiden Ellipsoide fordern.

Zuerst soll jedoch eine formal befriedigendere Methode diskutiert werden, die darauf beruht, dass man den Kern zunaechst einmal durch Multipolkoordinaten beschreibt und dann mittels einer kanonischen Transformation zu den hier verwendeten Koordinaten uebergeht. Der Vorteil dieser Verfahrensweise besteht darin, dass man die Multipolkoordinaten besser den unterschiedlichen Bereichen des Niederenergiespektrums zuordnen kann als die Koordinaten $\vec{r}, \alpha_1, \alpha_2$. Allerdings treten Schwierigkeiten auf im Bereich groesserer Relativabstaende der beiden Fragmente. Dann verliert die Beschreibung durch Multipolkoordinaten ihre Anschaulichkeit und schliesslich auch ihre Gueltigkeit, wenn die Fragmente sich nicht mehr beruehren. Die Beschreibung durch die Koordinaten $\vec{r}, \alpha_1, \alpha_2, (\eta)$ wird jedoch in diesem Bereich besonders guenstig, da saemtliche Kopplungen zwischen $\vec{r}, \alpha_1$ und α_2 (und η) allmaehlich verschwinden, wenn die Oberflaechen der beiden Fragmente sich voneinander loesen und sich schliesslich so weit voneinander entfernen, dass auch die Coulombwechselwirkung verschwindet.

Kurz gesagt soll eine Methode dargestellt werden, mit deren Hilfe Kopplungspotentiale berechnet werden koennen, die physikalisch sinnlose Schwingungen im Niederenergiebereich verhindern. Man erhaelt die Kopplungsterme, welche die Koordinaten $\vec{r}, \alpha_1, \alpha_2$ (und η) verkoppeln, dadurch, dass man erst einmal einen Ansatz fuer den Hamiltonoperator in Multipolkoordinaten macht und dann durch kanonische Transformation zu den Koordinaten $\vec{r}, \alpha_1, \alpha_2$ (und η) uebergeht.

Es stellt sich heraus, dass es nicht einfach ist, entsprechend den 13 bzw. 14 Freiheitsgraden unseres Modells genau 13 bzw. 14 Multipolkoordinaten zu finden, welche bezueglich Rotation einen abgeschlossenen Satz bilden. Will man nicht ins intrinsische System ausweichen, muss man naemlich fuer jede Multipolaritaet l alle $2l+1$ Koordinaten mitnehmen. 13 Freiheitsgrade lassen sich aufteilen in $1+5+7$ also Monopol Quadrupol und Oktupol. Nimmt man η hinzu, so bleibt nur die Aufteilung in $5+9$ das heisst Quadrupol und Hexadekupol, was keine sinnvolle Beschreibung der in unserem Modell moeglichen Kernformen ergibt. Wir wollen uns daher auf 13 Freiheitsgrade beschraenken und die Koordinate η als Parameter behandeln. Der Parameter η geht folgendermassen in die Definition der Koordinaten α_i ein:

$$\alpha_1: R_1 = 1.22 \left(\frac{A}{2} (1+\eta) \right)^{1/3} \left(1 + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_{1\mu} (-)^{\mu} Y_{2-\mu} \right) \quad (B.25)$$

$$\alpha_2: R_2 = 1.22 \left(\frac{A}{2} (1+\eta) \right)^{1/3} \left(1 + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_{1\mu} (-)^{\mu} Y_{2-\mu} \right).$$

Die Multipolkoordinaten $a^{[e]}$ koennen unter Einschluss der Monopolkoordinate etwas einfacher definiert werden, als sonst ueblich:

$$\alpha^{[0]}, \alpha^{[2]}, \alpha^{[3]}: R = \sum_{\substack{\ell=0,2,3 \\ m=-\ell, \dots, +\ell}} \alpha_m^{[e]} (-)^m Y_{\ell-m} \quad (B.25)$$

Dabei ist zu beachten, dass die $a^{[e]}$ die Dimension einer Laenge haben, waehrend die α_i dimensionslos sind.

Beim Ansatz eines kollektiven Hamiltonoperators in Multipolkoordinaten wurden bisher nur die Quadrupolkoordinate oder die Kombination von Quadrupol- und Oktupolkoordinate (g) verwendet. Die Monopolkoordinate wird normalerweise nicht zugelassen, da Volumenschwingungen in Kernen erst bei hohen Energien auftreten koennen. Wir wollen sie dennoch mitnehmen, damit die Zahl der Freiheitsgrade in den Systemen (a^0, a^2, a^3) und (α_1, α_2, r) uebereinstimmt. Die Forderung der Volumenerhaltung muss aber im unteren Energiebereich erfuehrt sein. Wir wollen daher fuer die Monopolkoordinate neben der ueblichen harmonischen kinetischen Energie ein Potential vorschlagen, welches quadratisch mit der Abweichung vom Grundzustandsvolumen anwaechst. Das Kernvolumen V laesst sich folgendermassen als Funktion der Koordinaten (a^0, a^2, a^3) schreiben:

$$V = \int d\tau = \frac{1}{3} \int R^3 d\Omega$$

$$R^3 = \sum_{e,m} \sum_{e',m'} \sum_{e'',m''} \alpha_m^e \alpha_{m'}^{e'} \alpha_{m''}^{e''} Y_m^{e*} Y_{m'}^{e'*} Y_{m''}^{e''*}$$

$$V = \frac{1}{3} \sum_{e, e', e''} \left[\frac{(2e+1)(2e'+1)(2e''+1)}{4\pi} \right]^{1/2}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} e & e' & e'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[[\alpha^e \times \alpha^{e'}]^{e''} \times \alpha^{e''} \right]^{[0]}$$

Damit laesst sich ein Potential U konstruieren, welches das Volumen des Kerns auf einem Wert V_0 konstant haelt:

$$U = (V - V_0)^2$$

Im Sinne von Kapitel B.2) handelt es sich hierbei um dynamische Volumenerhaltung. Wuerden wir die geometrische Volumenerhaltung fordern, so erhielten wir eine Oberflaeche die nicht von der Monopolkoordinate abhinge - die Monopolkoordinate bewirkt ja nichts anderes als eine Volumenaenderung - und koennten daher keine kanonische Transformation im gewuenschten Sinne durchfuehren. Damit soll die Diskussion des Hamiltonoperators fuer die Koordinaten α^e abgeschlossen und im uebrigen auf die Arbeit von Donner (9) verwiesen werden.

Wir machen folgenden Ansatz fuer die Transformation:

$$\alpha^{[0]} = A_{01} \sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}} + A_{02} [r \times \tau]^{[0]} + A_{03} [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} + \\ + A_{04} [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]} + A_{05} [\alpha_1 \times \alpha_2]^{[0]} + \dots$$

(B.26)

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mu}^{[2]} = & A_{21} \frac{[\tau \times \tau]_{\mu}^{[2]}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}} + A_{22} \alpha_{1\mu}^{[2]} + A_{23} \alpha_{2\mu}^{[2]} + \\
& + A_{24} [\tau \times \tau]_{\mu}^{[2]} + A_{25} [\alpha_1 \times \alpha_1]_{\mu}^{[2]} + \\
& + A_{26} [\alpha_2 \times \alpha_2]_{\mu}^{[2]} + A_{27} [\alpha_1 \times \alpha_2]_{\mu}^{[2]}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mu}^{[3]} = & A_{31} \frac{[\tau \times \tau \times \tau]_{\mu}^{[3]}}{[\tau \times \tau]^{[0]}} + A_{32} \frac{[\tau \times \tau \times \tau]_{\mu}^{[3]}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}} + \\
& + A_{33} [\tau \times \alpha_1]_{\mu}^{[3]} + A_{34} [\tau \times \alpha_2]_{\mu}^{[3]} + \dots
\end{aligned}$$

Bei diesem Ansatz wurde beachtet, dass auf beiden Seiten der Gleichung Paritaet und Rotationseigenschaften uebereinstimmen muessen. Die Terme A_{01}, A_{21}, A_{31} und A_{32} wuerden in einer Potenzreihenentwicklung normalerweise nicht auftauchen, sie lassen sich nicht nach Potenzen von r entwickeln. Wie aus der Arbeit von W. Fabian (17) hervorgeht, haengt das Quadrupolmoment jedoch in erster Naeherung linear von dem Zweizentrenabstand ab. Der Vollstaendigkeit halber wurden entsprechende Terme daher auch fuer die Monopol- und Oktupolkoordinaten eingefuehrt.

Die Konstanten $A_{01}, A_{02}, \dots, A_{21}, \dots$ haengen natuerlich sehr stark davon ab, welchen Wert der Asymetrieparameter η hat. Man muss sie daher fuer jedes η neu bestimmen oder nach η entwickeln. Betrachtet man sie als Funktionen von η , dann ergeben sich aus (B 10) folgende Forderungen:

$$\begin{aligned}
A_{03}(\eta) &= A_{04}(-\eta) \\
A_{22}(\eta) &= A_{23}(-\eta) \\
A_{25}(\eta) &= A_{26}(-\eta) \\
A_{33}(\eta) &= -A_{34}(-\eta)
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$A_{01}(\eta) = A_{01}(-\eta)$$

$$A_{02}(\eta) = A_{02}(-\eta)$$

$$A_{05}(\eta) = A_{05}(-\eta)$$

$$A_{21}(\eta) = A_{21}(-\eta) \quad (B.27)$$

$$A_{24}(\eta) = A_{24}(-\eta)$$

$$A_{27}(\eta) = A_{27}(-\eta)$$

$$A_{31}(\eta) = -A_{31}(-\eta)$$

$$A_{32}(\eta) = -A_{32}(-\eta)$$

Im Allgemeinen koennen diese Konstanten nicht auf analytischem Weg bestimmt werden, da die Geometrie der Kernoberflaeche in unserem Modell sehr kompliziert ist. Im Kapitel C.3) wird eine Methode dargestellt, mit deren Hilfe sie auf numerischem Wege berechnet werden koennen.

Als schwierigster Schritt erweist sich die Suche nach den kanonisch konjugierten Impulsen $p_m^{[e]}$ zu den Koordinaten $a_m^{[e]}$ aus (B 25). Nach der Kettenregel erhaelt man

$$p_m^{[e]} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial a_m^{[e]}} = \frac{\hbar}{i} \left\{ \sum_v \frac{\partial r_v}{\partial a_m^{[e]}} \frac{\partial}{\partial r_v} + \sum_v \left(\frac{\partial \alpha_{1v}}{\partial a_m^{[e]}} \frac{\partial}{\partial \alpha_{1v}} + \frac{\partial \alpha_{2v}}{\partial a_m^{[e]}} \frac{\partial}{\partial \alpha_{2v}} \right) \right\} \quad (B.28)$$

Dabei treten die unbekannten Groessen

$$\frac{\partial r_v}{\partial a_m^{[e]}}, \quad \frac{\partial \alpha_{1v}}{\partial a_m^{[e]}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \alpha_{2v}}{\partial a_m^{[e]}} \quad (B.29)$$

auf, zu deren Berechnung man die Umkehrtransformation zu (B 26) benoetigt. Wir machen folgenden Ansatz fuer die Umkehrtransformation :

$$\begin{aligned} r_\mu^{[1]} &= \tilde{A}_{01} [a^{[2]} \times a^{[3]}]_\mu^{[1]} + \dots \\ \alpha_{1\mu}^{[2]} &= \tilde{A}_{11} a_\mu^{[2]} + \tilde{A}_{12} a^{[0]} a_\mu^{[2]} + \tilde{A}_{13} [a^{[3]} \times a^{[3]}]_\mu^{[2]} + \dots \\ \alpha_{2\mu}^{[2]} &= \tilde{A}_{21} a_\mu^{[2]} + \tilde{A}_{22} a^{[0]} a_\mu^{[2]} + \tilde{A}_{23} [a^{[3]} \times a^{[3]}]_\mu^{[2]} + \dots \end{aligned} \quad (B.30)$$

Die Konstanten $\hat{A}_{01}, \hat{A}_{11}, \dots, \hat{A}_{21}, \dots$ bestimmt man ebenso, wie die Konstanten (B 27) im gleichen Arbeitsgang auf numerischem Wege. Dann ist es leicht mit (B 26), (B 28) und (B 30) die Transformation der Impulse anzugeben:

$$P^{[0]} = \tilde{A}_{12} \sqrt{5} \frac{[[\tau \times \tau]^{[2]} \times \pi_1]^{[0]}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}} + \frac{[[\tau \times \tau]^{[2]} \times \pi_2]^{[0]}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}}$$

$$P_{\mu}^{[2]} = -\tilde{A}_{01} \sqrt{\frac{3}{5}} \left[\left\{ A_{31} \frac{[\tau \times \tau \times \tau]^{[3]}}{[\tau \times \tau]^{[0]}} + A_{32} \frac{[\tau \times \tau \times \tau]^{[3]}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{33} [\tau \times \alpha_1]^{[3]} + A_{34} [\tau \times \alpha_2]^{[3]} \right\} \times \pi_{\tau}^{[1]} \right]_{\mu}^{[2]}$$

$$+ \left\{ \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{21} A_{01} \sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}} + \tilde{A}_{12} A_{02} [\tau \times \tau]^{[0]} + \right. \\ \left. + \tilde{A}_{12} A_{03} [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} + \tilde{A}_{12} A_{04} [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]} + \right. \\ \left. + \tilde{A}_{12} A_{05} [\alpha_1 \times \alpha_2]^{[0]} \right\} \pi_{1\mu}^{[2]}$$

$$+ \left\{ \tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{22} A_{01} \sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}} + \tilde{A}_{22} A_{02} [\tau \times \tau]^{[0]} + \right. \\ \left. + \tilde{A}_{22} A_{03} [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} + \tilde{A}_{22} A_{04} [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]} + \right. \\ \left. + \tilde{A}_{22} A_{05} [\alpha_1 \times \alpha_2]^{[0]} \right\} \pi_{2\mu}^{[2]},$$

$$P_{\mu}^{[3]} = \tilde{A}_{01} \sqrt{\frac{3}{7}} \left[\left\{ A_{21} \frac{[r \times r]^{[2]}}{\sqrt{[r \times r]^{[0]}}} + A_{22} \alpha_1^{[2]} + A_{23} \alpha_2^{[2]} + A_{24} [\tau \times \tau]^{[2]} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{25} [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[2]} + A_{26} [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[2]} + A_{27} [\alpha_1 \times \alpha_2]^{[2]} \right\} \times \overline{\Pi}_r^{[0]} \right]_{\mu}^{[3]}$$

$$- \tilde{A}_{13} \sqrt{\frac{20}{7}} \left[\left\{ \frac{A_{31}}{[r \times \tau]^{[0]}} [\tau \times \tau \times \tau]^{[3]} + \frac{A_{32}}{\sqrt{[r \times \tau]^{[0]}}} [\tau \times \tau \times \tau]^{[3]} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{33} [\tau \times \alpha_1]^{[3]} + A_{34} [\tau \times \alpha_2]^{[3]} \right\} \times \overline{\Pi}_1^{[2]} \right]_{\mu}^{[3]}$$

$$- \tilde{A}_{23} \sqrt{\frac{20}{7}} \left[\left\{ \frac{A_{31}}{[\tau \times \tau]^{[0]}} [\tau \times \tau \times \tau]^{[3]} + \frac{A_{32}}{\sqrt{[\tau \times \tau]^{[0]}}} [\tau \times \tau \times \tau]^{[3]} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{33} [\tau \times \alpha_1]^{[3]} + A_{34} [\tau \times \alpha_2]^{[3]} \right\} \times \overline{\Pi}_2^{[2]} \right]_{\mu}^{[3]}.$$

GUENSTIGE KOORDINATEN FUER DEN FALL GLEICHGROSSER FRAGMENTE UND KLEINER RELATIVABSTAENDE

Im letzten Abschnitt wurde das Problem der Beschraenkung der Freiheitsgrade bei niedrigen Energien vom formalen Standpunkt aus angegangen. Fuehrt man die dort vorgeschlagene Transformation von Multipolkoordinaten auf die Koordinaten unseres Modells durch, so erhaelt man einen Hamiltonoperator mit moeglicherweise vielen Kopplungstermen, der numerisch schwierig zu behandeln sein duerfte. Fuer praktische Rechnungen wird man daher eine einfachere Form des Hamiltonoperators suchen, die sich am Experiment orientiert. Betrachtet man die vorliegenden Experimente, so zeigt sich, dass die niederenergetischen Teile der Spektren in den meisten Faellen durch die 5 Freiheitsgrade der Quadrupolschwingungen beschrieben werden koennen (4). Wir haben 13 Freiheitsgrade eingefuehrt und muessen uns daher ueber die Funktion der 8 zusaetzlichen Freiheitsgrade klar werden.

Als erstes waere die Relativkoordinate zu betrachten, die sich dadurch auszeichnet, dass sie Zustaende liefert, welche negative Paritaet haben koennen. Daher liegt es nahe, mit dieser Koordinate eine Beschreibung der Oktupolzustaende zu versuchen. Die Konstruktion des Relativpotentials wird dann sehr stark davon abhaengig sein, welche Energie der erste Zustand negativer Paritaet haben soll. Natuerlich reicht die Anpassung der Energie alleine nicht aus, um Oktupoleigenschaften zu gewaehrleisten. Die Kopplungen der Relativkoordinate mit den anderen Koordinaten werden entscheidenden Einfluss darauf haben, welche Eigenschaften die Zustaende mit negativer Paritaet haben. Zuerst einmal wird es darauf ankommen, die Kopplungsterme so zu waehlen, dass die Struktur der Banden mit negativer Paritaet dem Experiment entspricht. Wenn das erreicht ist muessen Uebergangswahrscheinlichkeiten und Multipolmomente darueber Auskunft geben, ob diese Zustaende eine realistische Beschreibung der Kernformen liefern.

Die Quadrupolkoordinaten α_1 und α_2 liefern zu viele Zustaende, wenn sie nicht gekoppelt sind. Schon in der Hoehe des ueblichen Oszillatortriplets liegen drei zusaetzliche Zustaende, wenn die Kopplungsglieder des Hamiltonoperators abgeschaltet sind. Bei Rotationsspektren mit ihren eng aufeinander folgenden Energieniveaus wird es schliesslich ganz unmoeglich, die ungekoppelt ueberlagerten Spektren der Koordinaten α_1 und α_2 in Beziehung zum Experiment zu bringen.

Allerdings kann man die Resultate des Modells von G. Gneuss (4) dadurch reproduzieren, dass man fuer α_1 und α_2 Deckungsgleichheit dh. $\alpha_1 = \alpha_2$ fordert. Im einfachsten Fall waere dies dadurch zu erfuellen, dass man beide Koordinaten durch die gleiche Wellenfunktion beschreibt. Das bedeutet, dass die beiden Kernfragmente getrennt durch den Relativabstand $\vec{r}$ synchron zueinander schwingen. Wir wollen uns jedoch die Moeglichkeit offenhalten, fuer wachsende Relativabstaende auch unabhaengige Schwingungen zuzulassen. Eine Kopplung, die diese Eigenschaften hat ist

$$C(r) [(\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_1 - \alpha_2)]^{[0]} \quad (B.33)$$

Fuer $C(r)$ kann irgendeine Funktion verwendet werden, die fuer wachsende r gegen 0 geht (8).

Da diese Kopplung offensichtlich grosse Bedeutung im Rahmen unseres Modells hat, liegt es nahe, neue Koordinaten einzufuehren, in denen sie eine diagonale Darstellung findet. Beschraenken wir uns auf den Fall $\eta = 0$, so eignen sich dafuer folgende Koordinaten (18), (siehe Fig. 4):

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) \\ \pi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + \pi_2) \\ \pi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - \pi_2) \end{aligned} \quad (B.34)$$

Es laege nahe, eine kanonische Transformation von α_1, α_2 nach α^+, α^- durchzufuehren. Dies ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn die Hamiltonoperatoren H_α der beiden Fragmente harmonische Oszillatoren sind. Enthalten die Potentiale Glieder hoeherer als zweiter Ordnung, so ergeben sich komplizierte Kopplungen zwischen den Koordinaten α^+ und α^- . Die einzelnen Terme transformieren sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} & [\pi_1 \times \pi_1]^{[0]} \\ & \downarrow \\ & \frac{1}{2} [\pi^+ \times \pi^+]^{[0]} + [\pi^+ \times \pi^-]^{[0]} + \frac{1}{2} [\pi^- \times \pi^-]^{[0]} \\ & \\ & [\pi_2 \times \pi_2]^{[0]} \\ & \downarrow \\ & \frac{1}{2} [\pi^+ \times \pi^+]^{[0]} - [\pi^+ \times \pi^-]^{[0]} + \frac{1}{2} [\pi^- \times \pi^-]^{[0]} \end{aligned} \quad (B.35)$$

$$\begin{aligned}
& [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} \\
& \quad \downarrow \\
& [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} + [\alpha^+ \times \alpha^-]^{[0]} + [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]} \\
& \\
& [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]} \quad (B.35) \\
& \quad \downarrow \\
& [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} - [\alpha^+ \times \alpha^-]^{[0]} + [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]}
\end{aligned}$$

$$[(\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_1 - \alpha_2)]^{[0]} \longrightarrow 2 [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]}$$

Im Fall gleicher Fragmentmassen, also $\eta = 0$, sind die Oszillatorkonstanten fuer α_1 und α_2 gleich und die Mischterme fallen heraus :

$$\begin{aligned}
& P\{[\pi_1 \times \pi_1]^{[0]} + [\pi_2 \times \pi_2]^{[0]}\} + C\{[\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} + [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]}\} + \\
& \quad + C(\tau) [(\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_1 - \alpha_2)]^{[0]} \\
& \quad \downarrow \\
& P\{[\pi^+ \times \pi^+]^{[0]} + [\pi^- \times \pi^-]^{[0]}\} + C [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} + (C + 2C(\tau)) [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]}
\end{aligned} \quad (B.36)$$

Leider ist dies nicht mehr der Fall fuer Terme hoeherer Ordnung. Auch fuer den Fall $\eta = 0$ treten Kopplungsterme zwischen α^+ und α^- auf. Dies sei an den Termen dritter und vierter Ordnung verdeutlicht

$$[[\alpha_1 \times \alpha_1]^{[2]} \times \alpha_1]^{[0]} + [[\alpha_2 \times \alpha_2]^{[2]} \times \alpha_2]^{[0]}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [[\alpha^+ \times \alpha^+]^{[2]} \times \alpha^+]^{[0]} + \frac{7}{5\sqrt{2}} [[\alpha^- \times \alpha^-] \times \alpha^+]^{[0]}$$

(B.37)

$$[\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} [\alpha_1 \times \alpha_1]^{[0]} + [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]} [\alpha_2 \times \alpha_2]^{[0]}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4} [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} + \frac{1}{4} [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]} [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]} +$$

$$+ \frac{7}{10} [\alpha^+ \times \alpha^+]^{[0]} [\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]} + \frac{1}{5} [[\alpha^+ \times \alpha^+]^{[2]} \times [\alpha^- \times \alpha^-]^{[2]}]^{[0]} + \frac{\sqrt{9}}{5} [[\alpha^+ \times \alpha^+]^{[4]} \times [\alpha^- \times \alpha^-]^{[4]}]^{[0]}$$

Man fiele also vom Regen in die Traufe, wuerde man (B 34) als kanonische Transformation auffassen und den Hamiltonoperator, wie er im letzten Abschnitt konstruiert wurde, von den Koordinaten α_1, α_2 auf die Koordinaten α^+, α^- transformieren. Dagegen erscheint es sinnvoll, ihn von vorneherein in den Koordinaten α^+, α^- anzusetzen. Fuer kleine Relativabstaende ist es sicher unguenstig, von zwei unabhaengigen Fragmenten auszugehen und die ueberfluessigen Freiheitsgrade durch starke Kopplungsterme einzufrieren.

Verwendet man die Koordinaten α^+ und α^- , so kann man fuer den Fall $\alpha^- = 0$ leicht das Modell von G. Gneuss (4) reproduzieren. Mit wachsender Energie bzw. wachsendem Relativabstand kann dann α^- immer mehr an Bedeutung gewinnen. Allerdings muss bei grossen Relativabstaenden in Kauf genommen werden, dass Kopplungen auftreten, wie sie oben (B 37) angedeutet wurden. Spaetestens wenn die beiden Fragmente getrennt sind, duerften die Koordinaten α_1, α_2 eine einfachere Beschreibung liefern. Nun zeigen aber die Rechnungen mit dem Zweizentrenmodell (11), dass bei allen gebundenen Zustaenden die Oberflaechen der beiden Fragmente eine grosse Beruehrungszone haben, so dass die Schwingungen stark gekoppelt sein duerften. Daher soll fuer die praktischen Rechnungen ein neuer Ansatz des Hamiltonoperators in den Koordinaten α^+, α^- gemacht werden,

der fuer kleine Relativabstaende und gleichgrosse Fragmente eine einfachere numerische Behandlung verspricht. Er soll folgende Gestalt haben

$$H(\alpha^+, \alpha^-, \vec{r}) = H^+(\alpha^+) + H^-(\alpha^-) + H_T(\vec{r}) + \quad (B.38)$$

$$+ \sum_{i,j,k,j_{\pm}} C_{ijkj_{\pm}} \left[[P_i^+(\alpha^+) \times P_j^-(\alpha^-)]^{j_{\pm}} \times R_k^{j_{\pm}}(\vec{r}) \right]^{[0]}$$

Fuer $H^+(\alpha^+)$ verwenden wir den bekannten Hamiltonoperator von G. Gneuss (4) mit den Konstanten, die fuer eine grosse Zahl von Kernen in (10) bestimmt wurden. $H^-(\alpha^-)$ beschreibt die Differenzschwingungen der beiden Fragmentoberflaechen. Man setzt hierfuer beispielsweise einen harmonischen Oszillator oder einen Rotator an, deren Konstanten so gewaehlt sind, dass Zustaende mit hoeherer Oberflaechenmultipolaritaet als $l=2$ bei vernuenftigen Energien liegen.

Naturerlich muessen dabei wieder die Symmetrien aus B.3 beachtet werden. Die Transformation (B 10) hat in den neuen Koordinaten folgende Form

$$\begin{aligned} \vec{r} &\longrightarrow -\vec{r} \\ \alpha^+ &\longrightarrow \alpha^+ \\ \alpha^- &\longrightarrow -\alpha^- \end{aligned} \quad (B.39)$$

Fuer α^+ gibt es also keinerlei Einschraenkungen. Die Bedingungen fuer Terme, die aus α^- konstruiert werden, koennen aus (B 21) entnommen werden. In dem dortigen Ansatz tauchen nur die Glieder auf, die gegenueber der Vertauschung von α_1 und α_2 symmetrisch sind. Daraus ergibt sich, dass nur gerade Funktionen bzw. Potenzen von α^- verwendet werden duerfen. Daraus folgt, dass in dem Hamiltonoperator $H^-(\alpha^-)$ bis zur sechsten Ordnung nur ein γ -abhaengiger Term auftaucht naemlich

$$C_6 \left[[\alpha^- \times \alpha^-]^{[2]} \times \alpha^- \right]^{[0]} \left[[\alpha^- \times \alpha^-]^{[2]} \times \alpha^- \right]^{[0]}$$

Waerend die P_n^+ die gleichen bleiben wie die P_n aus (B 14), sind fuer die P_n^- nur noch folgende zugelassen:

n	ℓ_n	$p_n^{-[\ell_n]}$
1	0	1
2	0	$[\alpha^- \times \alpha^-]^{[0]}$
3	2	$[\alpha^- \times \alpha^-]^{[2]}$
4	4	$[\alpha^- \times \alpha^-]^{[4]}$

Zur Berechnung der Dynamik des Modells wird der Hamiltonoperator in Matrixdarstellung gebracht und diagonalisiert. Dazu ist es notwendig, zuerst einmal die Basiswellenfunktionen anzugeben. Danach werden die Matrixelemente ausgerechnet. Abschliessend wird eine Methode zur Berechnung der Multipoloperatoren dargestellt.

DIE BASISWELLENFUNKTIONEN

Bei der Wahl der Basis orientieren wir uns an den Ansaetzen (B 20) bzw. (B 38) fuer den Hamiltonoperator. Es liegt nahe, die Eigenfunktionen der Operatoren H_α , H_τ und H_η bzw. diejenigen von H^+ , H^- und H_τ zu einer Produktwellenfunktion zusammenzukoppeln und diese dann als Basiswellenfunktion fuer die Diagonalisierung des gesamten Hamiltonoperators zu verwenden. Nun gelangt man aber zu den Eigenfunktionen von H_α , H_η , H^+ und H^- nur durch Diagonalisierung dieser Operatoren in einer geeigneten Basis, die Eigenfunktionen zu H_τ erhaelt man durch numerische Integration. Man fuehrt also eine Vordagonalisierung derjenigen Bestandteile des Hamiltonoperators durch, die nur von jeweils einer Koordinate abhaengen. Das hat den Vorteil, dass man fuer H_α , H_τ , H_η , H^+ und H^- relativ komplizierte Funktionen zulassen kann und Beschraenkungen erst bei der Auswahl und Staerke der Kopplungen zwischen den Koordinaten notwendig werden. In der Praxis wirkt sich das dann zum Beispiel so aus, dass zur Diagonalisierung von H_α bis zu 370 Zustaende pro Drehimpuls mitgenommen werden koennen, waehrend bei der endgueltigen Diagonalisierung des Gesamtsystems in einer Basis von 1200 Zustaenden nur etwa 20 verschiedene Wellenfunktionen der Koordinate α_1 in der Produktwellenfunktion auftauchen, wobei sich diese 20 auf mehrere Drehimpulse verteilen.

Bevor wir ins Detail gehen, soll noch ein Ueberblick ueber die Gliederung dieses Abschnitts gegeben werden. Es wird der Reihe nach die Dynamik der Koordinaten $\tilde{r}$, η und $\alpha^{[2]}$ abgehandelt. Zum Schluss wird die Produktwellenfunktion fuer die Koordinatensaetze $(r, \eta, \alpha_1, \alpha_2)$ bzw. (r, α^+, α^-) eingefuehrt.

Die Relativkoordinate

Zur Behandlung der Relativkoordinate stehen zwei Möglichkeiten offen. Einerseits kann man den Hamiltonoperator nach Potenzen von $\vec{r}$ und den kanonisch konjugierten Impulsen entwickeln, Matrixelemente in der Basis des harmonischen Oszillators ausrechnen und diagonalisieren. Andererseits kann man in bekannter Weise eine Separation der drei Relativfreiheitsgrade in Drehung und Radialbewegung durchführen und die Lösung durch numerische Integration gewinnen. Beide Methoden wurden angewandt und verglichen. Dabei ergab sich, dass die numerische Integration zu Wellenfunktionen führt, die eine wesentlich genauere Berechnung der weiter hinten dargestellten Kopplungsmatrixelemente (C 27) ermöglichen, als dies bei der Diagonalisierung der Fall war. Daher wurde die Diagonalisierung verworfen, zumal die numerische Integration den Vorteil hat, dass das Potential punktweise frei gewählt werden kann, während man bei dem Polynomansatz auf eine beschränkte Zahl von Termen angewiesen ist, deren Konstanten angefügt werden müssen.

Die Separation der Schroedingergleichung liefert die bekannte Radialgleichung,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] \chi = E \chi \quad (C.1)$$

die mit einem Programm von O. Krause (6) gelöst wurde. Die vollständige Lösung hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \psi_n^{[e]}(\vec{r}) &= u_{ne}(r) Y^{[e]} \\ u_{ne}(r) &= \frac{\chi}{r} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Die Massenasymmetriekoordinate

Der Vollstaendigkeit halber soll die Dynamik der η -Koordinate kurz abgehandelt werden, obwohl aus Gruenden der numerischen Oekonomie dieser Freiheitsgrad bei den praktischen Rechnungen nicht zugelassen wurde. Der Hamiltonoperator H_η kann folgendermassen angesetzt werden:

$$H_\eta = H_0 + V(\eta). \quad (C.3)$$

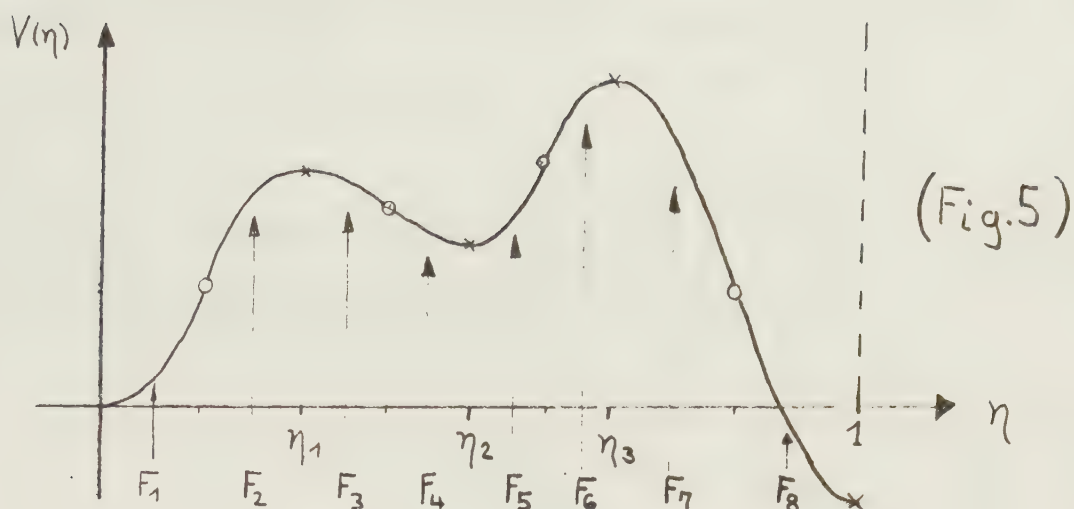
Dabei wird fuer H_0 der Hamiltonoperator eines Kastens gewaehlt, der auf das Intervall $(-1 \leq \eta \leq +1)$ beschraenkt ist. Zur Diagonalisierung wird die Matrix bezueglich der Basis von H_0 berechnet. Die Eigenfunktionen des eindimensionalen Kastens sind:

$$\begin{aligned} \chi_n &= \cos\left(\frac{n\pi}{2} \eta\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ \chi_n &= \sin\left(\frac{n\pi}{2} \eta\right), \quad n = 2, 4, 6, \dots \\ E_n &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m_\eta} n^2. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Bei Spiegelung am Ursprung verhalten sie sich folgendermassen:

$$\chi_n(\eta) = (-1)^{n+1} \chi_n(-\eta). \quad (C.5)$$

Die Matrixelemente des Potentials $V(\eta)$ lassen sich leicht berechnen, wenn es aus Parabelstuecken zusammengesetzt wird. Wie dies geschieht zeigt Figur 5.



Das Potential laesst sich auf diese Weise in beliebig viele Teilstuecke zerlegen. An den Punkten η_i kann $V(\eta_i)$ frei gewaehlt werden. Dadurch sind dann die Parameter der Interpolationsfunktionen

$$F_j = a_j + b_j (\eta - c_j) \quad (C.6)$$

wie folgt festgelegt:

$$a_j = V(\eta_i), \quad c_j = \eta_i, \quad b_j = \begin{cases} -b_{j-1} & \text{für } j \text{ gerade} \\ 2(V(\eta_{i+1}) - V(\eta_i)) / (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 & \text{für } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $i = \begin{cases} j/2 & j \text{ gerade} \\ (j-1)/2 & j \text{ ungerade} \end{cases}.$ (C.7)

Dabei wurde $\eta_k=1$ gewaehlt, wobei k die Zahl der Punkte η_i ist. Aus der Definition der Asymmetriekoordinate ergibt sich, dass das Potential symmetrisch um den Ursprung sein muss. Daher genuegt die Definition auf dem Intervall $(0 \leq \eta \leq 1)$. Die Matrixelemente bezueglich der Funktionen (C.4) lassen sich leicht ausrechnen:

$$\langle n \pm 1, 3, 5, \dots | V | n \rangle = 0. \quad (C.8)$$

Fuer ungerade n, n' ergibt sich

$$\langle n' | V | n \rangle = \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{g_{i+1}}{g_i} \int \left(\cos((n'-n) \frac{\pi}{2} \eta) + \cos((n'+n) \frac{\pi}{2} \eta) \right) \cdot (a_i + b_i (\eta - c_i)^2) d\eta$$

und fuer gerade n, n'

$$\langle n' | V | n \rangle = \sum_{i=1}^{2k+2} \frac{g_{i+1}}{g_i} \int \left(\cos((n'-n) \frac{\pi}{2} \eta) - \cos((n'+n) \frac{\pi}{2} \eta) \right) \cdot (a_i + b_i (\eta - c_i)^2) d\eta$$

mit $g_1 = 0$

$$g_{2k+2} = 1$$

$$g_i = \begin{cases} \eta_j, & j = \frac{i-1}{2} \text{ für ungerade } i \\ \frac{\eta_j + \eta_{j-1}}{2}, & j = i/2 \text{ für gerade } i \end{cases}$$

Versuchsweise wurde ein Potential mit drei Minima diagonalisiert. Es ergab sich eine befriedigende Konvergenz mit 100 Basiszuständen. In Figur 6 ist das Ergebnis einer Modellrechnung dargestellt, bei der ein Potential mit drei Minima verwendet wurde, wie es bei Kernen mit triple-hump-fission auftreten koennte. Die Rechnung wurde nur fuer symmetrische Zustände bezueglich des Ursprungs durchgefuehrt. Die Berechnung der antisymmetrischen Zustände sollte keine zusaetzlichen Schwierigkeiten machen.

Die Quadrupolkoordinate

Zur Berechnung der Quadrupoleigenzustände können wir uns an dem Modell von G. Gneuss (4) orientieren. Der Quadrupolhamiltonoperator wird folgendermassen angesetzt

$$\begin{aligned}
 |-\rangle = & P_2 [\pi \times \pi]^{[0]} \\
 & + P_2 [([\pi \times \alpha] \times \pi)]^{[0]} \\
 & + C_2 [\alpha \times \alpha]^{[0]} \\
 & + C_3 [([\alpha \times \alpha] \times \alpha)]^{[0]} \\
 & + C_4 [\alpha \times \alpha]^{[0]} [\alpha \times \alpha]^{[0]} \\
 & + C_5 [\alpha \times \alpha]^{[0]} [([\alpha \times \alpha] \times \alpha)]^{[0]} \\
 & + C_6 [([\alpha \times \alpha] \times \alpha)]^{[0]} [([\alpha \times \alpha] \times \alpha)]^{[0]} \\
 & + D_6 [\alpha \times \alpha]^{[0]} [\alpha \times \alpha]^{[0]} [\alpha \times \alpha]^{[0]}
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

und in der Basis des harmonischen Oszillators

$$\frac{5}{4 B_2'} [\pi \times \pi]^{[0]} + C_2' [\alpha \times \alpha]^{[0]} \tag{C.10}$$

diagonalisiert. Die dabei benötigten Matrixelemente werden mit gruppentheoretischen Methoden berechnet (13). Bestandteil dieser Arbeit war es, die Basis, deren Matrixelemente bisher nur bis zum Drehimpuls $6\hbar$ bekannt waren, bis zum Drehimpuls $30\hbar$ zu erweitern. Da dazu keine neuen theoretischen Konzepte entwickelt werden mussten, sollen gruppentheoretische Details hier nicht behandelt werden.

Mit Hilfe dieser Matrixelemente ist es jetzt möglich, die Rechnungen von Monika und Rolf Sedelmayr (10) zu höheren Drehimpulsen hin zu vervollständigen. Solche Rechnungen wurden durchgeführt und finden sich im Abschnitt D dieser Arbeit.

Der Ansatz (C 5) kann fuer die Koordinaten α_1, α_2 bzw. α^+ ohne Einschränkungen verwendet werden. Bei der Koordinate α^- werden die Terme C_3 und C_5 weggelassen, da diese Terme, wie oben erwähnt, nicht der Symmetrie (B 10) genuegen. Die Eigenfunktionen zu (C 9) sind Ueberlagerungen von Zuständen des harmonischen Oszillators (C 10)

$$[e] \psi_i = \sum_{N \nu \alpha} c_{N \nu \alpha}^i |N \nu e \alpha\rangle \quad (C.11)$$

Die Wellenfunktionen der Koordinate α^- zerfallen in zwei Gruppen, was das Verhalten gegenueber der Transformation

$$\alpha^- \longrightarrow -\alpha^-$$

angeht. Da der Hamiltonoperator gegenueber dieser Transformation invariant ist, muessen auch die Wellenfunktionen bis auf das Vorzeichen invariant sein. Fuer die eine Gruppe gilt:

$$\psi(\alpha^-) = \psi(-\alpha^-) .$$

Sie haben daher in der Basisdarstellung des harmonischen Oszillators nur Komponenten mit geradzahligem Hauptquantenzahl N . In der anderen Gruppe ist:

$$\psi(\alpha^-) = -\psi(-\alpha^-) .$$

Hier gibt es also nur Komponenten fuer ungeradzahliges N . Fuer die Basisfunktionen gilt:

$$|N \nu e \alpha\rangle \xrightarrow{\alpha^- \rightarrow -\alpha^-} (-)^N |N \nu e \alpha\rangle . \quad (C.12)$$

Die Produktwellenfunktion und ihre Symmetrien

Der einfachste Ansatz fuer die Basiswellenfunktionen ist die vektorielle Kopplung der Wellenfunktionen der Teilsysteme.

$$\phi_{ijk, \ell, j_{12}, \bar{3}}(\alpha_1, \alpha_2, \tau, \eta) = \left[[\psi_{1i}(\alpha_1) \times \psi_{2j}(\alpha_2)]^{[j_{12}]} \times \psi_k(\bar{r}) \right]^{[\bar{3}]} \cdot \chi_\ell(\eta) \quad (C.13)$$

Die Quadrupolfunktionen der beiden Fragmente wurden durch die Indizes 1 und 2 unterschieden. Das ist zwar ueberfluessig, wenn man den Ansatz (B 20) des Hamiltonoperators verwendet, fuer den Ansatz (B 24) ist es jedoch von Vorteil.

Wie bei der Konstruktion des Hamiltonoperators ist zu beachten, dass die gleiche Oberflaechengestalt durch zwei verschiedene Koordinatensaetze beschrieben werden kann, die durch die Transformation (B 10) ineinander ueberfuehrt werden koennen. Betrachtet man die Oberflaeche des Kerns als die eigentliche Koordinate des Modells, so muss die Wellenfunktion gegenueber (B 10) invariant sein. Andernfalls waere die Wellenfunktion in Bezug auf die Oberflaechengestalt doppeldeutig. Diese Argumentation ist analog zu derjenigen des Rotations-Vibrationsmodells (2), wo ebenfalls unterschiedliche Koordinatensaetze die gleiche Kernform beschreiben. Waehlt man die Darstellung durch Multipolkoordinaten wie in (B 25), so gibt es keine Schwierigkeiten, da in diesem Fall die Beziehung zwischen Koordinaten und Oberflaechengestalt eindeutig ist. Verwendet man dagegen die Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \bar{r}$ und η so muss man wie in (B 16, 17) verfahren, um eine gegenueber (B 10) invariante Wellenfunktion zu erhalten:

$$S = N \{ \phi + \mathcal{O} \phi \} \quad (C.14)$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die $\bar{r}_i, \alpha_i, m_i$ als die Koordinaten von Bosonen auffasst, und die Wellenfunktion gegen deren Vertauschung symmetrisiert. Man erhaelt dann:

$$S_{ijk, \ell, j_{12}, \bar{3}}(\alpha_1, \alpha_2, \tau, \eta) = N \left\{ \phi_{ijk, \ell, j_{12}, \bar{3}}(\tau_1, \alpha_1, m_1; \tau_2, \alpha_2, m_2) + \phi_{ijk, \ell, j_{12}, \bar{3}}(\tau_2, \alpha_2, m_2; \tau_1, \alpha_1, m_1) \right\} \quad (C.15)$$

Mit $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2$, $\eta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$

$$\psi_k(-\vec{\tau}) = (-)^{j_r^{(k)}} \psi_k(\vec{\tau})$$

$$\chi_e(-\eta) = P_\eta(e) \chi_e(\eta)$$

ergibt sich

$$S_{i,j,k,e,j_1,j_2,\vec{\tau}} = N \left\{ \left[\varphi_{1i}^{j_1}(\alpha_1) \times \varphi_{2j}^{j_2}(\alpha_2) \right]^{j_{12}} + \right. \\ \left. + (-)^{j_1(i) + j_2(j) + j_{12} + j_r^{(k)}} P_\eta(e) \left[\varphi_{2j}^{j_2}(\alpha_1) \times \varphi_{1i}^{j_1}(\alpha_2) \right]^{j_{12}} \right\} \times \\ \times \psi_k(\vec{\tau}) \Big]^{[\vec{\tau}]} \chi_e(\eta). \quad (C.16)$$

Wenn die Systeme φ_{1i} und φ_{2j} verschieden sind, muss man zur Berechnung der Norm

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_1(i) + j_2(j) + j_{12} + j_r^{(k)}} P_\eta(e) \cdot \left\langle \left[\varphi_{1i}(\alpha_1) \times \varphi_{2j}(\alpha_2) \right]^{j_{12}} \middle| \left[\varphi_{2j}(\alpha_1) \times \varphi_{1i}(\alpha_2) \right]^{j_{12}} \right\rangle \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (C.17)$$

auf die Darstellung (C 11) der Wellenfunktionen zurueckgreifen. Beziehen sich die Koeffizienten $C_{N\nu\alpha}^{1i}$ und $C_{N\nu\alpha}^{2i}$ kurz C_m^{1i} und C_m^{2i} auf die gleiche Basis, so vereinfacht sich die Rechnung und es ergibt sich:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_1(i) + j_2(j) + j_{12} + j_r^{(k)}} P_\eta(e) \left(\sum_m C_m^{1i} C_m^{2j} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (C.18)$$

Andernfalls diagonalisiert man den Basisoszillator des Systems (2) in der Basis des Systems (1) und erhaelt so die Koeffizienten D_n^m , welche die Transformation von Oszillatorbasis (2) auf die Basis (1) ermoeeglichen:

$$|N\nu\ell\alpha\rangle_2 = |m\rangle_2 = \sum_n D_n^m |n\rangle_1. \quad (C.19)$$

Die Formel fuer N lautet dann:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_1(i) + j_2(j) + j_{12} + j_r(k)} P_\eta(e) \left(\sum_{mn} C_m^{1i} D_n^m (C_n^{2j})^2 \right)^{-1/2} \right) \quad (C.20)$$

Werden entsprechend dem Ansatz (B 20) die gleichen Hamiltonoperatoren zur Beschreibung der Oberflaechenschwingungen der beiden Fragmente verwendet, so koennen die Indizes 1 und 2 weggelassen werden und die Wellenfunktion erhaelt folgende Gestalt:

$$S_{i,j,k,l,j_{12},j} = N \left[\{ [\varphi_i(\alpha_1) \times \varphi_j(\alpha_2)]^{j_{12}} + (-)^{j_1(i) + j_2(j) + j_{12} + j_r(k)} P_\eta(e) [\varphi_j(\alpha_1) \times \varphi_i(\alpha_2)]^{j_{12}} \right] \times \psi_k(\vec{r}) \cdot \chi_e(\eta)$$

$$\text{mit } N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_{12} + j_r(k)} P_\eta(e) \delta_{ij} \right)^{-1/2} \quad (C.21)$$

$$\eta = \text{konst} = 0 \leadsto P_\eta(e) = 1.$$

Fuer die Faelle ($\eta=0$), in denen die Indizes i und j uebereinstimmen, kann man leicht die Wirkung der Symmetrisierung erkennen. Es fallen alle Zustaende heraus, bei denen die Summe von j_{12} und $j_r(k)$ ungerade ist. Fuer alle anderen Zustaende laesst sich jedoch in dieser Darstellung keine Aussage machen.

Weitergehende Aussagen sind jedoch moeglich, wenn man die Basis in der $(\alpha^+, \alpha^-, \vec{r})$ -Darstellung betrachtet, sie lautet dann:

$$S_{i,j,k,l,j_{12},j}(\alpha^+, \alpha^-, \vec{r}) = N_0 \left[[\varphi_i^+(\alpha^+) \times (\varphi_j^-(\alpha^-) + (-)^{j_r(k)} \varphi_j^-(-\alpha^-))]^{j_{12}} \times \psi_k(\vec{r}) \right]^{[j]} \quad (C.22)$$

$$\text{mit } N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_r(k)} \langle \varphi_j^-(\alpha^-) | \varphi_j^-(-\alpha^-) \rangle \right)^{-1/2}.$$

Die Norm laesst sich mit Hilfe von (C 12) leicht ausrechnen. Es ergibt sich:

$$(C.23)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n,v,\alpha} (C_{N(n),v,\alpha}^{-j})^2 \right)^{-1/2} \quad \text{mit } N(n) = \begin{cases} 2n & j_r(k) \text{ gerade} \\ 2n+1 & j_r(k) \text{ ungerade} \end{cases}$$

$n=0,1,2,\dots$

Wie ueblich in lokalisierten Systemen scheiden die nicht

normierbaren Funktionen aus. Waehlt man einen harmonischen Oszillator als Hamiltonoperator H^- , so erhaelt man:

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-)^{j_r + N(j)} \right)^{-1/2}, \quad (C. 24)$$

wobei $N(j)$ die Hauptquantenzahl des j -ten Zustandes sein soll. Bei Zuständen gerader Paritaet, also mit geradem j_r , muss $N(j)$ gerade sein, bei Zuständen negativer Paritaet ungerade.

Im Gegensatz zum Fall (C 21) liegt die gesamte symmetrische Basis in uebersichtlicher Form vor, was bei der Diskussion der Modellrechnungen von Vorteil sein wird.

Betrachten wir zuerst die Matrixelemente in der Darstellung $(\alpha_1, \alpha_2, \tau, \eta)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle S'_{i,j,k,\ell,j_{12},\Xi} | H | S_{i,j,k,\ell,j_{12},\Xi} \rangle &= \langle S' | H | S \rangle = \\ &= N'N \{ \langle \Phi'(1;2) | + \langle \Phi'(2;1) | \} H \{ | \Phi(1;2) \rangle + | \Phi(2;1) \rangle \} \\ \text{mit } \Phi(1;2) &= \phi_{\substack{\tau_1, \alpha_1, m_1; \\ i,j,k,\ell,j_{12},\Xi}}(\tau_2, \alpha_2, m_2) \end{aligned} \quad (C.25)$$

Da das System invariant gegenueber Vertauschung der Indizes ist (siehe B 10), braucht man nur zwei der vier Terme zu berechnen:

$$\langle S' | H | S \rangle = 2 N N' \{ \langle \Phi'(1;2) | H | \Phi(1;2) \rangle + \langle \Phi'(1;2) | H | \Phi(2;1) \rangle \} \quad (C.26)$$

Die weitere Rechnung wird durch Uebergang zu reduzierten Matrixelementen erleichtert:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\left[\varphi_{1i}^{j_1} \times \varphi_{2j}^{j_2} \right]^{[j_{12}]} \times \psi_k^{j_r}(\vec{r}) \right]^{[3]} \cdot \chi_e(\eta) \right| \left[\left[P_{q_1}^{e_1}(\alpha_1) \times P_{q_2}^{e_2}(\alpha_2) \right]^{e_{12}} \times R_{q_r}^{e_{12}}(\vec{r}) \right]^{[0]} F_{q_\eta}(\eta) \\ \left| \left[\left[\varphi_{1i}^{j_1} \times \varphi_{2j}^{j_2} \right]^{[j_{12}]} \times \psi_k^{j_r} \right]^{[3]} \cdot \chi_e(\eta) \right\rangle = \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$= (-)^{j_{12} + j_r + j - l_{12}} \begin{Bmatrix} j & j_{12} & j_r \\ l_{12} & j_r & j_{12} \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2l_{12} + 1}} \langle Y^{j_r} \| Y^{l_{12}} \| Y^{j_r} \rangle.$$

$$\cdot \langle u_{k j_r} | U_{q_r l_{12}} | u_{k j_r} \rangle \langle \chi_e | F_{q_\eta} | \chi_e \rangle.$$

$$\cdot \langle [\varphi_{1i}^{j_1} \times \varphi_{2j}^{j_2}]^{[j_{12}]} \| [P_{q_1}^{l_1} \times P_{q_2}^{l_2}]^{[l_{12}]} \| [\varphi_{1i}^{j_1} \times \varphi_{2j}^{j_2}]^{[j_{12}]} \rangle =$$

$$= \frac{(-)^{j_{12} + j - l_{12}}}{\sqrt{4\pi}} \begin{Bmatrix} j & j_{12} & j_r \\ l_{12} & j_r & j_{12} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_r & l_{12} & j_r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_1 & l_1 \\ j_2 & j_2 & l_2 \\ j_{12} & j_{12} & l_{12} \end{Bmatrix} \hat{j}_r \hat{j}_r \hat{l}_{12} \hat{j}_{12} \hat{j}_{12}.$$

$$\cdot \langle \varphi_{1i}^{j_1} \| P_{q_1}^{l_1} \| \varphi_{1i}^{j_1} \rangle \langle \varphi_{2j}^{j_2} \| P_{q_2}^{l_2} \| \varphi_{2j}^{j_2} \rangle. \quad (C.27)$$

$$\cdot \langle u_{k j_r} | U_{q_r l_{12}} | u_{k j_r} \rangle \langle \chi_e | F_{q_\eta} | \chi_e \rangle$$

$$\text{mit } R_{q_r}^{[l_{12}]} = U_{q_r l_{12}} Y^{[l_{12}]} \text{ und } \psi_k^{j_r}(\vec{r}) = u_{k j_r} Y^{[j_r]}.$$

Die verbleibenden reduzierten Matrixelemente der Quadrupolwellenfunktionen werden auf reduzierte Matrixelemente der Erzeugungs- bzw Vernichtungsoperatoren zurueckgefuehrt. Diese wurden nach der von G. Gneuss (4) angegebenen Methode berechnet. Die Matrixelemente des Radialteils des Relativpotentials liessen sich problemlos numerisch integrieren. Aehnliches duerfte fuer diejenigen der Massenasymmetriekoordinate zu erwarten sein. Sie wurden nicht programmiert, da diese Koordinate bei den endgueltigen Rechnungen nicht verwendet wurde.

Die Matrixelemente in der Darstellung $(\alpha^+, \alpha^-, \vec{r})$ haben die gleiche Struktur. Die Symmetrisierung wirkt sich in der Praxis so aus, dass man entsprechend dem Drehimpuls der Relativbewegung bzw der Paritaet entweder die symmetrischen oder die antisymmetrischen Wellenfunktionen $\varphi_i^{\pm}(\alpha^{\pm})$ verwendet, wie sie in (C 11) beschrieben sind.

DER QUADRUPOLOPERATOR

Die Geometrie der Kernoberflaeche ist in unserem Modell aeusserst kompliziert. Man stoesst daher auf einige Schwierigkeiten bei der Berechnung des Quadrupoloperators, da die Integrationsgrenzen des Volumenintegrals nicht problemlos als Funktion der Koordinaten dargestellt werden koennen. Der Quadrupoloperator ist gegeben als Formel:

$$Q_{\mu}^2 = \int_{V(\text{kern})} \tau^2 Y_{\mu}^2 d\tau. \quad (\text{C.28})$$

Teilt man die Integration, wie ueblich, auf in Radial- und Winkelintegration, so muss man den Kernradius als Funktion des Raumwinkels kennen. Zweckmaessigerweise entwickelt man daher den Kernradius nach Kugelfunktionen.

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \quad (\text{C.29})$$

Dabei treten die Multipolkoordinaten a_{lm} auf, die wir schon aus (B 25) kennen. Die Entwicklungskoeffizienten $a_{lm}^{(n)}$ fuer hoehere Potenzen von R kann man durch Verkopplung der Kugelfunktionen berechnen. Dabei treten jedoch hohe l -Werte auf, die dazu fuehren, dass die durch R beschriebene Oberflaeche viele Einschnuerungen und Ausstuelpungen erhaelt. Man entwickelt daher besser jede Potenz von R getrennt:

$$R^n(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm}^{(n)} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (\text{C.30})$$

Nun haengen allerdings die Entwicklungskoeffizienten a_{lm} stark davon ab, von welchem Punkt aus der Kernradius gemessen wird. Insbesondere muss R eine eindeutige Funktion der Winkel sein, woraus sich Beschraenkungen fuer die Lage des Ursprungs im Kern ergeben. Haben beide Fragmente gleiche Masse, so duerfte es am sinnvollsten sein, die Kernoberflaeche um den Punkt $r/2$ zu entwickeln. Solange der Kern eine physikalisch sinnvolle Gestalt hat, beschreibt dann R fuer gegebene Winkel ϑ und φ immer nur einen Punkt der Oberflaeche. Natuerlich gilt dies nicht mehr fuer Zustaende, die bei der Spaltung auftreten. Dann verlieren aber die Koordinaten a_{lm} ohnehin ihren Sinn.

Wenn wir um den Punkt $r/2$ entwickeln verletzen wir allerdings die Forderung der Schwerpunktserhaltung, da der Schwerpunkt im allgemeinen nicht mit dem Punkt $r/2$ identisch ist. Dieser Fehler kann jedoch ,wie unten gezeigt wird,

nachtraeglich korrigiert werden.

Auch das Volumen ist nicht konstant, sondern haengt stark von den Koordinaten α_1, α_2 und r ab. Das Volumen V laesst sich folgendermassen berechnen:

$$V = \int d\tau = \frac{1}{3} \int R^3(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{1}{3} \sqrt{4\pi} a_{00}^{(3)} . \quad (C.31)$$

Fuer die weiteren Rechnungen muessen wir eine Oberflaeche definieren, die ein konstantes Volumen umschliesst. Sie soll durch den Radius $\tilde{R}$ beschrieben werden mit

$$\tilde{R} = R \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{a_{00}^{(3)}} V_0 \right)^{1/3} R, \quad (C.32)$$

wobei wie ueblich

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 = \frac{4\pi}{3} 1.22 A^{1/3}$$

gesetzt wurde.

Da im Folgenden nur noch die Funktion $\tilde{R}$ benoetigt wird, ist es zweckmaessig, die Entwicklung (C 30) nur fuer $n=3$ durchzufuehren und dann $\tilde{R}^n$ zu entwickeln.

$$\tilde{R}^n(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell m} \tilde{a}_{\ell m}^{(n)} Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \quad (C.33)$$

Damit erhaelt man neue Multipolentwicklungskoeffizienten $\tilde{a}_{\ell m}^{(n)}$, welche im Gegensatz zu den $a_{\ell m}^{(n)}$ nur Kernformen mit konstantem Volumen beschreiben. Die $\tilde{a}_{\ell m}^{(n)}$ und die $a_{\ell m}^{(n)}$ haengen folgendermassen zusammen:

$$\tilde{a}_{\ell m}^{(n)} = \left(\frac{3}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{a_{00}^{(3)}} V_0 \right) a_{\ell m}^{(n)} . \quad (C.34)$$

Wegen der besseren Uebersichtlichkeit wird das Gleichungssystem zur Berechnung der $a_{\ell m}^{(n)}$ bzw der $\tilde{a}_{\ell m}^{(n)}$ am Schluss dieses Abschnitts angegeben.

Der Rest bereitet jetzt keine Schwierigkeiten mehr. Man beschafft sich zuerst den Schwerpunkt $\vec{S}$ am besten in

sphaerischer Darstellung ;

$$\begin{aligned}
 S_{\mu}^{[1]} &= \frac{1}{V_0} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^{\tilde{R}} \int Y_{1\mu} \tau^3 d\tau d\Omega = \\
 &= \frac{1}{4V_0} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int Y_{1\mu} \tilde{R}^4 d\Omega \quad (C.34) \\
 &= \frac{1}{V_0} \sqrt{\frac{\pi}{12}} \tilde{a}_{1\mu}^{(4)}
 \end{aligned}$$

Wir haben also ein um $-S$ gegenueber dem Schwerpunkt verschobenes Entwicklungszentrum gewaehlt. Analog zum Steinerschen Satz im Falle des Traegheitsmoments laesst sich diese Verschiebung nachtraeglich sehr einfach korrigieren. Ist Q_{μ} das Quadrupolmoment bezogen auf den Schwerpunkt, $Q_{0\mu}$ das Quadrupolmoment bezueglich des Ursprungs und q_{μ} das Quadrupolmoment der gleichen punktförmig am Schwerpunkt S konzentrierten Ladung, so gilt:

$$Q_{\mu} = Q_{0\mu} - q_{\mu}. \quad (C.35)$$

Der Beweis fuer $\mu=0$ lautet

$$Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z^2 - r^2) \rho d\tau, \quad (C.36)$$

Verschiebung des Schwerpunkts (x_s, y_s, z_s) in den Ursprung bedeutet

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 - x_s \\
 y &= y_0 - y_s
 \end{aligned} \quad (C.37)$$

$$z = z_0 - z_s,$$

Einsetzen in (C.36) ergibt

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2) \rho d\tau_0 + Ze \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} + \\
 &+ Ze \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2z_s^2 - x_s^2 - y_s^2) \quad (C.38) \\
 &- \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int 2(2z_0 z_s - x_0 x_s - y_0 y_s) \rho d\tau_0 \\
 &= Q_{00} - Ze \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2z_s^2 - x_s^2 - y_s^2).
 \end{aligned}$$

In sphärischer Darstellung hat (C 35) folgende Gestalt:

$$Q_{\mu} = \int Y_{2\mu} r^2 \rho_0 d\tau - Ze \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [S \times S]_{\mu}^{[2]} \\ = \frac{1}{5} \rho_0 \int Y_{2\mu} \tilde{R}^5 d\Omega - Ze \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [S \times S]_{\mu}^{[2]} \quad (C.39)$$

$$Q_{\mu} = \frac{1}{5} \rho_0 \tilde{\alpha}_{2\mu}^{(5)} - \sqrt{\frac{15\pi}{2}} \frac{1}{24} \frac{\rho_0}{V_0} [\tilde{\alpha}_1^{(4)} \times \tilde{\alpha}_1^{(4)}]_{\mu}^{[2]}$$

$$\text{mit } \rho_0 = Ze/V_0.$$

Die Hauptschwierigkeit besteht in der Berechnung der Funktionen $\tilde{a}_{em}^{(n)}$ bzw $a_{em}^{(n)}$. Man entwickelt sie wie in (B 13) nach den Koordinaten α_1 , α_2 und r .

$$a_{em}^{(n)} = \sum_v C_{nv}^e [[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2)]^{[j_{12}]} \times R_k^{[j_k]}]_m^e \\ \tilde{a}_{em}^{(n)} = \sum_v \tilde{C}_{nv}^e [[P_i^{e_i}(\alpha_1) \times P_j^{e_j}(\alpha_2)]^{[j_{12}]} \times R_k^{[j_k]}]_m^e \\ \text{mit } v = (i, j, k, j_{12}) \quad (C.40)$$

Genauso wie die $\tilde{a}_{em}^{(n)}$ und die $a_{em}^{(n)}$ stehen auch die $\tilde{C}_{nv}^e$ und die C_{nv}^e in einem einfachen Zusammenhang:

$$\tilde{C}_{nv}^e = \left(\frac{3}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\alpha_{00}^{(3)}} V_0 \right) C_{nv}^e. \quad (C.41)$$

Die Koeffizienten $\tilde{C}_{nv}^e$ bzw C_{nv}^e müssen numerisch berechnet werden. Das Verfahren wird fuer die $\tilde{C}_{nv}^e$ beschrieben. Man loest zuerst das Gleichungssystem

$$\tilde{R}^n(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \tau_i, j_j, \varphi_j) = \sum_{l,m} \tilde{a}_{em}^{(n)}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \tau_i) Y_{em}^*(j_j, \varphi_j) \quad (C.42)$$

wobei j der Zeilenindex und l, m die Spaltenindizes sind. Der Index i zaehlt die verschiedenen Inhomogenitaeten ab, welche man dadurch erhaelt, dass man verschiedene geeignete Saetze (α_1, α_2, r) auswaehlt. Nun kann man fuer jedes l getrennt die Gleichungssysteme fuer die $\tilde{C}_{nv}^e$ aufstellen, wobei die

$\tilde{a}_{e,0}^{(n)}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \vec{r}_i)$ aus (C 42) die Inhomogenitaet bilden:

$$\tilde{a}_{e,0}^{(n)}(\alpha_{1\lambda}, \alpha_{2\lambda}, \vec{r}_\lambda) = \sum_{\nu} \tilde{C}_{n\nu}^e \left[[P_i(\alpha_{1\lambda}) \times P_j(\alpha_{2\lambda})]^{[j_{12}]} \times \right. \\ \left. \times R_k^{[i_k]}(\vec{r}_\lambda) \right]_0^e .$$

Zeilenindex ist in diesem Fall λ und Spaltenindex ν .

Aus dem im Abschnitt C dargestellten Konzept der Vordagonalisierung ergibt sich die Notwendigkeit, moeglichst allgemeine Modelle fuer die Relativbewegung und die Quadrupolschwingung zu entwickeln. Da bisher keine Berechnungen von Quadrupolschwingungen hohen Drehimpulses auf der Basis von Potentialflaechen vorliegen, werden als erstes drei Faelle dieser Art vorgestellt. Darauf folgen Rechnungen, bei denen alle 13 Freiheitsgrade des dynamischen Zweizentrenmodells eingeschlossen sind. Wegen des hohen Zeitaufwandes wird dabei der Drehimpuls $7\hbar$ nicht ueberschritten und die knappe Rechenzeit dazu genutzt, moeglichst viel ueber die Wirkung der Kopplungsterme zu erfahren.

QUADRUPOLSCHWINGUNGEN MIT HOHEM DREHIMPULS

Von Monika Sedelmayr (10) wurden Potentialflaechen zu einer grossen Zahl von Kernen errechnet. Dabei wurden Zustaende und Uebergangswahrscheinlichkeiten bis zum Drehimpuls $6\hbar$ angefittet. Nun bietet sich die Moeglichkeit, bis $l=30\hbar$ zu extrapolieren. Zu diesem Zweck wurde ein besonders guter Fit, naemlich $^{192}_{76}\text{Os}$ ausgewaehlt. Als naechstes wurde die Frage untersucht, ob sich mit dem Modell von G. Gneuss (4) der Backbending-Effekt beschreiben laesst. Am Schluss wird mit $^{238}_{92}\text{U}$ ein Kern vorgestellt, der eine experimentell gut vermessene Bande mit Zustaenden negativer Paritaet besitzt. Dieser Kern soll als Anhaltspunkt fuer die Rechnungen mit dem Zweizentrenmodell dienen, welche im naechsten Abschnitt folgen.

Im Fall von ^{192}Os ist es M. Sedelmayr (10) gelungen, alle Banden gleich gut an das Experiment anzupassen. Daher sollte dieses Spektrum besonders gut zur Extrapolation nach hohen Drehimpulsen geeignet sein. Eine solche Rechnung wurde durchgefuehrt. Das Ergebnis ist in Figur 7 dargestellt. Auffaellig ist das Verhalten der γ -Bande. Die Zustaeude naehern sich bis $l=22\hbar$ der Grundbande und entfernen sich dann wieder. Um dieses Verhalten genauer untersuchen zu koennen, wurde in Figur 8 die Abweichung von Grund-, γ - und β -Bande von der Gerade des starren Rotators betrachtet. Es zeigt sich, dass eine Wechselwirkung zwischen der Grund- und der γ -Bande im Bereich zwisch $l=16\hbar$ und $l=28\hbar$ auftritt. Insbesondere das Verhalten der Zustaeude mit ungeradem Drehimpuls ist von Bedeutung. Laege eine Kreuzung von Grund- und γ -Bande vor, so muessten diese Zustaeude sich allmaehlich der mit 'G' bezeichneten Kurve anschliessen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Yrast-Zustaeude mit geradzahligem l entstehen also im ganzen erfassten Bereich durch Rotationen um nur eine Achse, naemlich die Haupttraegheitsachse. Die Erklaerung fuer das Verhalten der γ -Bande laesst sich wahrscheinlich eher bei der kinetischen Energie suchen. Wie schon G. Gneuss (4) bemerkte, bewirkt der Parameter P eine energieabhaengige Aenderung der Prolat- Oblatdifferenz und hat dadurch eine besonders ausgepraegte Wirkung auf die γ -Bande.

Backbending

Aus Experimenten weiss man, dass das Traegheitsmoment von Kernen mit wachsender Rotationsenergie groesser wird und insofern vom Modell des starren Rotators abweicht. Bei einigen Kernen tritt der spezielle Fall auf, dass diese Zunahme im Bereich weniger Drehimpulsquanten sprunghaft stattfindet, um dann wieder im ueblichen Mass fortzufahren. Fuer uns ist interessant, ob eine Erklaerung dieses Verhaltens durch kollektive Effekte moeglich ist. Seit langem wird in diesem Zusammenhang die Kreuzung von Banden diskutiert. Die Zustaende einer Bande, deren Traegheitsmoment groesser ist als das der Grundbande, folgen dichter aufeinander, als die der Grundbande. Ab einem bestimmten Drehimpuls liegen die Zustaende dieser Bande daher niedriger als diejenigen der Grundbande mit dem gleichen Drehimpuls. Da die niedrigsten Zustaende zu einem gegebenen Drehimpuls (Yrast-level) am leichtesten gemessen werden koennen, findet man hinter dem Kreuzungspunkt der Banden ein groesseres Traegheitsmoment, als davor. Da bisher keine Rechnungen zu diesem Phaenomen auf der Basis einer Potentialflaeche vorliegen, wurden die vorhandenen Moeglichkeiten zu diesem Zweck genutzt.

Am einfachsten kommt man zum Ziel, wenn man eine Potentialflaeche mit zwei Minima bei unterschiedlichen β -Deformationen konstruiert, was mit den Parametern des Gneuss-Modells (4) moeglich ist. Eine solche Flaeche ist in Figur 9 dargestellt. Das tiefere Minimum liegt auf der prolaten Achse naeher am Ursprung, waerend das hoehere auf der oblaten Achse in groesserer Entfernung vom Ursprung angesiedelt ist. Die Rechnung in Figur 10 liefert das erwartete Resultat. Es treten zwei Banden mit deutlich unterschiedenem Traegheitsmoment auf. Das Traegheitsmoment der Grundbande ist wesentlich kleiner als das der darueberliegenden ' β -Bande'. Der besonders gekennzeichnete Yrast-level laeuft zuerst an der Grundbande entlang und wechselt bei $l=14\hbar$ zu der Bande mit dem groesseren Traegheitsmoment. Der uebliche Backbending Plot ist in Figur 11 zu sehen.

Die Besonderheit dieses Falles liegt darin, dass keine Wechselwirkung zwischen den sich kreuzenden Banden stattfindet. Das hat seine Ursache in der hohen Barriere zwischen den beiden Minima. Wuerde man die Barriere niedriger machen, so erhaelte man die bekannte Abstossung zwischen den wechselwirkenden Niveaus. Interessant waere in diesem Zusammenhang die Untersuchung, welche Bedingungen die Potentialflaeche erfuellen muss, damit Backbending auftritt. Zwei Minima sind sicher keine notwendige Bedingung. Moeglicherweise genuegen Terrassenpunkte oder sogar nur Wendepunkte in Schnitten der Potentialflaeche entlang der Richtung $\gamma=\text{konst.}$ Eine weitere Moeglichkeit bieten Anharmonizitaeten in der kinetischen Energie, deren Wirkung der oben diskutierte Fall ^{192}Os demonstriert.

Aus zwei Gruenden ist ^{238}U fuer uns interessant. Einerseits ist das Spektrum bis zu hohen Drehimpulsen aus Experimenten (14) bekannt. Man kann daher nachpruefen ob die Extrapolation des Fits von M. Sedelmayer (10) sinnvolle Resultate liefert. Auf der anderen Seite gibt es eine Bande mit Zustaenden negativer Paritaet, die als Anhaltspunkt fuer die Rechnungen des naechsten Abschnitts dient.

In Figur 12 sind die Ergebnisse, die man mit den Parametern von M. Sedelmayer (10) erhaelt, im Vergleich mit dem Experiment von de Boer (14) dargestellt. Um eine moeglichst gute Konvergenz zu erreichen, wurde der von M. Sedelmayer angegebene P_3 -Parameter nicht verwendet. Dies ist in diesem Fall vertretbar, da sich die Spektren mit und ohne P_3 nur wenig voneinander unterscheiden.

Im Gegensatz zu ^{192}Os ist es nicht gelungen, alle Banden gleich gut an das Experiment anzupassen. Die Traegheitsmomente von Beta- und Gammabande sind im theoretischen Spektrum wesentlich kleiner als dasjenige der Grundbande. Dadurch treten Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment auf, die wahrscheinlich auf dem steilen aeusseren Anstieg der Flaeche des Gneuss-Modells beruhen (6). Die berechnete Grundbande stimmt bis Drehimpuls 30 $\hbar$ sehr gut mit dem Experiment ueberein. Nimmt man den P_3 -Parameter hinzu, so werden die oberen Zustaende noch etwas angehoben, so dass keine Abweichungen gegenueber der Messung mehr erkennbar sind. Wir wollen jedoch fuer die Rechnungen des folgenden Abschnitts auf P_3 verzichten, um moeglichst gut konvergierende Wellenfunktionen zur Berechnung der Kopplungsmatrixelemente zur Verfuegung zu haben.

Im theoretischen Teil der Arbeit wurde der Hamiltonoperator des dynamischen Zweizentrenmodells in moeglichst allgemeiner Form definiert. Fuer praktische Rechnungen kommt es darauf an, den einzelnen Bestandteilen des Hamiltonoperators eine physikalisch sinnvolle Gestalt zu geben. Insbesondere muss man sich bei der Wahl der Kopplungsterme Beschraenkungen auferlegen. Welche Kopplungsterme verwendet werden, und inwiefern die Eigenzustaende des gekoppelten Systems konvergieren, ist Thema des folgenden Abschnitts.

Dann folgen zwei Abschnitte, in denen jeweils ein Modell untersucht wird. Im ersten Fall handelt es sich um zwei Rotatoren mit den Koordinaten α_1 und α_2 , die mit dem Relativabstand $\vec{r}$ umeinander kreisen. Das zweite Modell wird wesentlich ausfuehrlicher diskutiert. Dabei werden die Koordinaten α^+ , α^- und $\vec{r}$ verwendet, wobei α^+ die Funktion der Quadrupolkoordinate des Gneuss-Modells (4) uebernimmt und ebenfalls einen Rotator beschreibt.

Die Kopplungsterme

Der Kopplungsteil des Hamiltonoperators bereitet naturgemaess am meisten Schwierigkeiten bei numerischen Rechnungen. Man braucht sich nur zu vergegenwaertigen, dass es in der Polynomschreibweise (B 21) 52 linear unabhaengige Kopplungsterme vierter und niedrigerer Ordnung gibt. Daraus ergeben sich zwei Probleme. Einerseits fuehrt die grosse Zahl der Kopplungsterme zu grossen Rechenzeiten bei der Konstruktion der Matrix. Andererseits ist es schwer, den vielen Termen individuelle physikalische Bedeutung zuzuweisen.

Betrachten wir die Koordinaten in Figur 1, so stellen wir fest, dass Kernformen moeglich sind, die zu einer grossen Oberflaeche fuehren und gemass dem Liquid Drop Modell hohe potentielle Energie haben. Die Oberflaeche ist insbesondere bei kleinem Relativabstand stark abhaengig von der Differenz der Koordinaten α_1 und α_2 bzw. von der Differenz der Winkel (ϑ_1, φ_1) und (ϑ_2, φ_2) . Am kleinsten ist die Oberflaeche bei gegebenen α_1 und $\vec{r}$, wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &\longrightarrow 0 \\ \text{bzw. } (\vartheta_i, \varphi_i) - (\vartheta, \varphi) &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (D.1)$$

In der Arbeit von A. Kappatsch (8) wird gezeigt, dass sich harmonische Abweichungen von der in (D 1) definierten Fragment- und Relativorientierung durch die Terme

$$V_{\alpha_i r} = C_{\alpha_i r} \sum_{j=0,2,4} - \hat{J} \begin{pmatrix} 2 & 2 & j \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[[\alpha_i \times \alpha_i]^{[j]} \times Y^j \right]^{[0]} \quad (D. 2)$$

beschreiben lassen. In Figur 13 ist dieses Potential als Funktion des Winkels zwischen den Richtungen (ϑ_i, φ_i) und (ϑ, φ) fuer verschiedene Werte der Fragmentdeformation β_i aufgetragen (8). Die Terme

$$\left[[\alpha_i \times \alpha_i]^{[0]} \times Y^0 \right]^{[0]}$$

sind keine eigentlichen Kopplungsterme und koennen daher in die Vordagonalisierung einbezogen werden. Bei den praktischen Rechnungen wurden sie weggelassen, da sie bei der verwendeten Groessenordnung der Konstante $C_{\alpha r}$ nur geringfuegige Aenderungen des harmonischen Anteils der Fragmentpotentiale bewirken, was auf die grundsaeztliche Aussage der Studien keinen Einfluss hat.

Die harmonische Abweichung von dem Zustand $\alpha_1 = \alpha_2$ laesst sich besonders leicht in Form eines rotationsinvarianten Potentials schreiben:

$$V_{12} = C_{12} \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_1 - \alpha_2) \right]^{[0]}. \quad (D. 3)$$

Dieser Term wurde schon in (B 33) behandelt. Bei der Verwendung der Koordinaten α^+ und α^- verliert (D 3) den Charakter eines Kopplungsterms (siehe B 35) und kann daher in die Vordagonalisierung einbezogen werden. Anders ist dies bei dem Term (D 2), der im Koordinatensystem α^+, α^- die gleiche Gestalt hat, wie im Koordinatensystem α_1, α_2 :

$$V_{\alpha^{\pm} r} = C_{\alpha^{\pm} r} \sum_{j=0,2,4} - \hat{J} \left[[\alpha^{\pm} \times \alpha^{\pm}]^{[j]} \times Y^j \right]^{[0]}. \quad (D. 4)$$

Er koppelt nicht α_1 mit α_2 sondern jeweils getrennt α_1 mit $\vec{r}$ und α_2 mit $\vec{r}$. Diese Eigenschaft bleibt auch im Koordinatensystem α^+, α^- erhalten.

Im allgemeinen wuenscht man sich eine Abhaengigkeit der Konstanten $C_{\alpha r}$ und C_{12} vom Betrag des Relativabstandes. Die Programme wurden daher so konstruiert, dass generell alle Kopplungsterme mit einem $|r|$ -abhaengigen Faktor folgender Gestalt multipliziert werden koennen

$$A e^{-B r^2} . \quad (D.5)$$

Da es sich jedoch bei allen praktischen Rechnungen um Faelle handelte, bei denen die verwendeten Relativpotentiale keine groesseren Schwankungen des Relativabstands zuliessen, wurde $A=1$ und $B=0$ gesetzt.

Betrachtet man den Term (D 2) in der Polynomdarstellung, so setzt er sich aus folgenden Bestandteilen zusammen:

$$\begin{aligned} & C_1 \left[[\alpha_1 \times \alpha_1]^{[2]} \times Y^{[2]} \right]^{[0]} \\ & C_2 \left[[\alpha_1 \times \alpha_1]^{[4]} \times Y^{[4]} \right]^{[0]} \\ & C_3 \left[[\alpha_2 \times \alpha_2]^{[2]} \times Y^{[2]} \right]^{[0]} \\ & C_4 \left[[\alpha_2 \times \alpha_2]^{[4]} \times Y^{[4]} \right]^{[0]} \\ & \text{bzw } C_1 \left[[\alpha^+ \times \alpha^+]^{[2]} \times Y^{[2]} \right]^{[0]} \text{ usw.} \end{aligned} \quad (D.6)$$

Wir wollen daher nicht nur die Wirkung von $C_{\alpha r}$ untersuchen, sondern auch die Wirkung jedes einzelnen Terms aus (D 6), um die Ergebnisse besser interpretieren zu koennen.

In dieser Studie wollen wir uns den Kern zusammengesetzt denken aus zwei deformierten Fragmenten, welche mit dem Relativabstand $\vec{r}$ umeinander kreisen. Der Einfachheit halber nehmen wir eine harmonische Relativbewegung an. Damit bei niedrigen Energien das uebliche Rotatorspektrum reproduziert werden kann, setzen wir die oben beschriebenen Kopplungspotentiale (D 2, D 3) an. Da Zustaeude mit negativer Paritaet nur durch Anregung der Relativkoordinate entstehen, waehlen wir die Oszillatorkonstante des $\vec{r}$ -Oszillators so, dass ein Vergleich mit Oktupolzustaeuden moeglich ist.

Die Kopplungspotentiale (D 2) und (D 3) muessen in einer geeigneten Basis diagonalisiert werden. Wir konstruieren diese Basis, indem wir die Zustaeude der beiden Rotatorfragmente vordagonalisieren und mit den Oszillatorzustaeuden der Relativbewegung zu gutem Drehimpuls koppeln.

Wenn man die Zustaeude zweier Rotatoren nach den Regeln der Vektorkopplung zusammenkoppelt, erhaelt man ein sehr kompliziertes Spektrum. Um die wesentlichen Eigenschaften dieses Spektrums sichtbar zu machen, genueget es, die Addition der beiden Grundbanden zu betrachten. Es handelt sich dabei, entsprechend (B 21), beidesmal um Eigenzustaende des gleichen Hamiltonoperators, dessen Konstanten fuer den Kern ^{238}U von M. Sedelmayr (10) angefitet wurden. In Figur 14 ist das gekoppelte Spektrum aufgezeichnet. Zu jedem Zustand der urspruenglichen Grundbande mit dem Drehimpuls l gibt es $2l+1$ neue Banden mit unterschiedlichen Traegheitsmomenten. Das Traegheitsmoment haengt davon ab, welche Richtung die addierten Drehimpulsvektoren haben. Die Bande mit dem groesstmoeeglichen Traegheitsmoment ist mit der Yrastbande identisch, die am rechten Rand noch einmal fuer sich alleine gezeichnet ist. Die Drehimpulsvektoren dieser Zustaeude sind parallel ausgerichtet. Wie man sich leicht ueberzeugen kann, tritt eine Abweichung vom $I(I+1)$ -Gesetz auf. Die Energien sind ungefaehr proportional zu $I(I+2)$, wenn I der Gesamtdrehimpuls ist. Das kommt daher, weil die Yrastzustaende keine homogene Bande bilden, sondern aus der Kreuzung verschiedener Banden mit immer groesserem Traegheitsmoment entstehen. Bei jedem zweiten Zustand tritt eine solche Kreuzung auf.

Die Zustaeude oberhalb und unterhalb der eigezeichneten Kurve unterscheiden sich nur hinsichtlich der Vertauschung von α_1 und α_2 . Fuehrt man die Symmetrisierung (C 14) durch, so erhaelt man das gleiche Spektrum, wie wenn man alle Zustaeude ober- bzw. unterhalb der Kurve weglaesst, nur stimmt dann natuerlich die Kennzeichnung der Banden durch die Drehimpulse l_1 und l_2 nicht mehr. Aus (C 21) ergibt sich, dass entlang der Kurve alle Zustaeude mit ungeradem Drehimpuls wegfallen.

Damit ist der Teil der Basis konstruiert, welcher durch die Kopplung der Grundbanden unserer beiden Rotatoren entsteht. Eine weitere Klasse von Zustaeuden ist dadurch charakterisiert, dass das erste Phonon der Relativbewegung mit dem Drehimpuls $1\hbar$ und negativer Paritaet angeregt ist.

Diese Zustände haben im Prinzip die gleiche Struktur, wie diejenigen in Figur 14, nur dass in diesem Fall anstelle einer Bande jeweils drei Banden auftreten. Neben jedem Zustand mit Drehimpuls 1 tritt ein solcher mit Drehimpuls 1+1 und 1-1. Ausserdem gibt es gemäss (C 21) entlang der Kurve nur Zustände bei denen die Drehimpulse der beiden Rotatorfragmente zu ungeradem Drehimpuls gekoppelt sind.

Die gesamte Basis wurde so konstruiert, dass fuer jede Koordinate 10 Zustände pro Drehimpuls zugelassen, zu gutem Gesamtdrehimpuls gekoppelt und nach der Gesamtenergie sortiert wurden. Die 1200 Zustände mit der niedrigsten Energie wurden zur Diagonalisierung des Kopplungspotentials verwendet. Zum Test der Konvergenz wurden Rechnungen mit 800 Zuständen durchgeführt. Die Parameter des Kopplungspotentials wurden moeglichst gross gewaehlt, soweit der Konvergenztest dies im Rahmen der Rechengenauigkeit zulies.

Fuer die Diagonalisierung wurden verschiedene Verfahren erprobt. Als bestes erwies sich das bekannte Iterationsverfahren, wobei der Startvektor mit dem Lanczos-Algorithmus berechnet wurde. Aus Gruenden der Zeitersparnis wurden pro Drehimpuls nur die 10 untersten Niveaus berechnet. Die Spektren koennen daher nicht vollstaendig sein.

Das Ergebnis der Rechnungen ist in Figur 15 zu sehen. In der Mitte ist das urspruengliche Rotationsspektrum eines Fragmentes gezeichnet. Links ist die Wirkung des Kopplungsterms (D 3) dargestellt und rechts sind die beiden Kopplungsterme (D 3) und (D 2) eingeschaltet. Der Term (D 3) ist dazu bestimmt, Zustände energetisch zu bevorzugen, bei denen beide Fragmente die gleiche Gestalt haben. Das bedeutet, dass bei den untersten Zuständen die Drehimpulsvektoren der beiden Fragmente parallel sein sollten. Diese Wirkung wird tatsaechlich erzielt. Offensichtlich werden die Zustände der Yrastbande der Basis bevorzugt, was sich in dem grossen Traegheitsmoment von Grund-, Beta- und Gammabande widerspiegelt. Die untersten Zustände negativer Paritaet entstehen durch Anregung des 1⁻ Zustandes der Relativbewegung. Da der verwendete Kopplungsterm die Relativkoordinate nicht beeinflusst, liegt dieser Zustand in reiner Form vor. Man kann die untersten Zustände negativer Paritaet daher folgendermassen klassifizieren:

$$\text{-----} \quad [j_{12} = 3^+, j_r = 1_1^-] \quad [2], [3], [4]^-$$

$$\text{-----} \quad [j_{12} = 2^+, j_r = 1_1^-] \quad [1], [2], [3]^-$$

$$\text{-----} \quad [j_{12} = 1^+, j_r = 1_1^-] \quad [0], [1], [2]^-$$

Es liegen drei Banden vor die sich durch die Ausrichtung des Relativdrehimpulses gegenueber dem Gesamtdrehimpuls der gekoppelten Fragmente unterscheiden.

Schaltet man den Kopplungsterm (D 2) ein, was auf der rechten Seite der Zeichnung dargestellt ist, so wird die Entartung dieser drei Banden aufgehoben. Die beiden Fragmente koennen sich jetzt nicht mehr frei gegenueber der Relativkoordinate drehen.

Schwierig zu deuten sind die Zustaende positiver Paritaet, die durch Anregung der Relativkoordinate oder unterschiedlicher Schwingungen in den beiden Fragmenten entstehen. Sie sind jeweils in der mittleren Kolonne der Spektren gezeichnet. Auf der linken Seite sind als unterste Zustaende dieser Art die Zwei-Phononen Anregungen der Relativbewegung zu erkennen. Soweit es die Vollstaendigkeit des Spektrums zulaesst, erkennt man eine darauf aufbauende Rotationsbande mit aehnlichen Entartungen, wie im Fall der Zustaende negativer Paritaet:

$$\begin{aligned}
 & \text{----- } [j_{12}=4, j_r=0]^{[4]^+}, [j_{12}=4, j_r=2_1]^{[2],[3],[4],[5],[6]} + \\
 & \text{----- } [j_{12}=2, j_r=0]^{[2]^+}, [j_{12}=2, j_r=2_1]^{[0],[1],[2],[3],[4]} + \\
 & \text{----- } [j_{12}=0, j_r=0_2]^{[0]^+}, [j_{12}=0, j_r=2_1]^{[2]^+} .
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich als Hauptmerkmal dieses Modells das Anwachsen des Traegheitsmomentes des gekoppelten Systems, gegenueber den Traegheitsmomenten der beiden Fragmente. Ausserdem erhaelt man drei Banden negativer Paritaet, welche wie Gammabanden Zustaende mit abwechselnd geradem und ungeradem Drehimpuls enthalten.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit sich mit den Koordinaten α^+ , α^- und $\vec{r}$ ein Niederenergiespektrum beschreiben laesst. Gegenueber den Koordinaten α_1 , α_2 und $\vec{r}$ besteht der Vorteil, dass man eine Basis konstruieren kann, welche dem experimentellen Spektrum unterhalb des Bereichs der Zustaende mit negativer Paritaet vollkommen gleicht. Zunaechst soll die Konstruktion dieser Basis erlaeutert werden. Dann folgen zwei Abschnitte, in denen unterschiedliche Modelle vorgestellt werden.

Konstruktion der Basis

Wie schon im Abschnitt (B 6) erlaeutert wurde, soll im Fall $\alpha^- = 0$ und $\vec{r} = 0$ das Modell von G. Gneuss (4) reproduziert werden. Wir setzen daher fuer die α^+ -Koordinate den bekannten Hamiltonoperator fuer ^{238}U an. Nun gibt es mehrere moegliche Ansaetze fuer die Hamiltonoperatoren der α^- - und der $\vec{r}$ - Bewegung. In den Figuren 16, 17 und 18 sind drei solche Moeglichkeiten schematisch angedeutet. In den ersten beiden Faellen wurde fuer die α^- und die $\vec{r}$ - Koordinate jeweils ein harmonischer Oszillator angesetzt. Im ersten Fall hat der Relativoszillator eine kleinere Oszillatorkonstante, im zweiten Fall der α^- - Oszillator. Auf der linken Seite sind jeweils die vordagonalisierten Spektren zu sehen und auf der rechten Seite das gekoppelte Basisspektrum.

Der Uebersichtlichkeit halber sind die Basiszustaende nicht vollstaendig klassifiziert. Es wird im Allgemeinen nur fuer die Bandenkoefpe angegeben, aus welchen vordagonalisierten Zustaenden sie sich zusammensetzen. Dabei ist mit l_1 ein Zustand der Grundbande mit Drehimpuls 1 gemeint. l_1 kann also die Werte 0, 2, 4, 6, ... annehmen. Der Zwischendrehimpuls wird nicht angegeben. Die erste Zahl innerhalb der Klammern kennzeichnet den α^+ - , die zweite den α^- und die dritte den $\vec{r}$ - Anteil der entsprechenden Basiswellenfunktion.

Die beiden Faelle in Figur 16 und 17 haben gemeinsam, dass die untersten Zustaende, bei denen entweder die α^- - oder die $\vec{r}$ - Koordinate angeregt sind, positive Paritaet besitzen. Diese Zustaende liegen nie mals oberhalb der Niveaus mit negativer Paritaet, solange man harmonische Oszillatoren fuer α^- und $\vec{r}$ verwendet. Um dem Experiment moeglichst nahe zu kommen, kann man daher sowohl fuer die α^- - als auch fuer die $\vec{r}$ - Bewegung Rotatoren verwenden. Diese Moeglichkeit ist in Figur 18 dargestellt. Der Nachteil dieses Ansatzes liegt darin, dass die Deformation der Grundzustandsbande in diesem Fall nicht allein durch die Koordinate α^+ bestimmt wird, da α^- und r im Grundzustand deformiert sind.

Dem Betrachter der Basisspektren faellt ins Auge, dass scheinbar Zustaende fehlen, zum Beispiel die Bande $\langle 1_1, 2_1, 0_1 |$. Dies ist eine Folge der Symmetrisierungsbedingung (C 22) und laesst sich im Fall von Vibratoren anhand von (C 24) verstehen. Bei Rotatoren trifft das gleiche zu, da der 2_1^+ -Zustand des

α^- -Freiheitsgrades nur Basiszustaende mit ungerader Hauptquantenzahl enthaelt (siehe C. 1. c).

Damit waere die allgemeine Diskussion der Basis abgeschlossen. In den naechsten beiden Abschnitten folgen Rechnungen zu den Studien in Figur 16 bzw 18.

Wir wollen nun ein Modell numerisch realisieren, welches dem in Figur 16 dargestellten aehnlich ist. Die vordagonalisierten Zustaende sind in Figur 19 zu sehen. Fuer die α^+ - Schwingung wird das bekannte ^{238}U - Potential verwendet. Grund-, Gamma- und Betabande sind in der linken Spalte gezeichnet. In der Mitte ist das Spektrum des α^- - Oszillators bis zum Zwei- Phononen- Multiplett zu erkennen. Die Zustaende des $\tilde{r}$ - Oszillators in der rechten Spalte haben ungefaehr einen halb so grossen Abstand voneinander, wie die α^- - Zustaende.

Koppelt man die drei Spektren, so erhaelt man die Basis, welche in Figur 20 dargestellt ist. Links sind wieder Grund-, Gamma- und Betabande zu erkennen. In der Mitte findet man Banden, welche auf den beiden Zwei- Phononen- Relativzustaenden, den 3 Vier- Phononen- Relativzustaenden und dem Zwei- Phononen- Multiplett der α^- - Schwingung aufbauen. Die Zustaende negativer Paritaet, welche rechts aufgetragen sind, entstehen durch Kopplung der Grundbande mit dem ersten Phonon der Relativbewegung.

Der Vergleich mit Figur 16 zeigt, dass in grober Naeherung gewisse Aehnlichkeiten bestehen zwischen dem System $\alpha_1, \alpha_2, \tilde{r}$ gekoppelt durch C_{12} und dem System $\alpha^+, \alpha^-, \tilde{r}$ ohne Kopplung. Insbesondere gibt es in beiden Faellen eine Bande, welche auf den Zweiphononenzustaenden der Relativbewegung aufbaut und die gleichen Multipletts besitzt. Allerdings unterscheiden sich die Traegheitsmomente. Im Fall von Figur 20 bleibt das Traegheitsmoment der vordagonalisierten Zustaende erhalten, waehrend es in Figur 16 angewachsen ist. Der Entartungsgrad der Zustaende negativer Paritaet ist in Figur 20 wesentlich hoeher, als in Figur 16.

Betrachten wir uns nun die Wirkung des Kopplungspotentials. Ergebnisse einer Rechnung mit dem Term C_1 sind in Figur 21 abgebildet. Die 6-fach entartete Bande positiver Paritaet ist jetzt in sechs Banden aufgespalten, da bei all diesen Schwingungen nur α^+ - und $\tilde{r}$ -Phononen angeregt sind, welche durch C_2 in Wechselwirkung treten. Aus der 15-fach entarteten Bande negativer Paritaet werden drei Banden mit jeweils 5-fach entarteten Zustaenden. Zwei dieser Banden sind so ineinander verzahnt, dass man sie gemeinsam als 5-fach entartete Gammabande auffassen kann. Die Entartung ist nicht voellig aufgehoben, da alle Freiheitsgrade angeregt sind, aber nur α^- und $\tilde{r}$ miteinander wechselwirken.

Rechnungen mit weiteren Termen des Kopplungspotentials wurden durchgefuehrt. Dabei wurde das oben beschriebene Konvergenzkriterium angewendet, erwies sich jedoch nachtraeglich als zu schwach, so dass die Ergebnisse verworfen werden mussten. Erst als ein Programm zur Verfuegung stand, welches die Verwendung von 3000 Basiszustaenden gestattete, konnte die Konvergenz zuverlaessig getestet werden. Es zeigte sich, dass 1200 Basiszustaende genuegen, um die symmetriebrechenenden Eigenschaften des Kopplungspotentials zu untersuchen. Zur Berechnung der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Banden brauchte man jedoch eine Basis, die um mindestens eine Grossenordnung erweitert sein muesste.

Im Folgenden beschraenken wir uns daher auf die

Untersuchung schwacher Kopplungspotentiale.

Kopplung eines α^+ -Rotators mit α^- - und $\tilde{r}$ - Rotatoren, deren Traegheitsmomente klein sind

Wir wollen uns jetzt mit der Studie aus Figur 18 naeher befassen. Die dort vorgeschlagene Basis hat den Vorteil, dass die Zustaende negativer Paritaet unterhalb der hochentarteten Multipletts positiver Paritaet liegen. Dies entspricht dem ^{238}U - Spektrum, welches uns als Vorlage dient, am besten.

Figur 18 gibt die Energien der vordagonalisierten Zustaende getreu wieder. In Figur 22 ist die Potentialflaeche fuer die α^- - Bewegung zu sehen. Sie ist nicht von $\tilde{r}$ abhaengig. Der einzige erlaubte γ -abhaengige Term (siehe C. 1. c), C_6 , wurde nicht verwendet, um eine - im Vergleich zu den folgenden Zustaenden - moeglichst tief liegende 2_1^+ -Anregung zu erhalten.

Fuer die Relativbewegung wurde ebenfalls ein Rotatorpotential angesetzt, welches in Figur 23 abgebildet ist. Auch in diesem Fall liegt das Minimum bei einer sehr kleinen Deformation. Damit wird ein geringes Traegheitsmoment erzielt. Auf diese Weise soll erreicht werden, dass die Zustaende negativer Paritaet in der Basis etwas oberhalb der experimentellen Energie liegen, da sie durch die Wechselwirkung nach unten verschoben werden.

Die Basis ist in Figur 24 aufgezeichnet. Die Banden wurden in der bekannten Weise in drei Gruppen aufgeteilt. Links sind die reinen α^+ - Rotationen zu finden. Addiert man zu diesen Zustaenden die 2_2^+ - und 4_1^+ - Anregung der α^- - Schwingung bzw die 2_1^+ - Anregung der Relativbewegung, so erhaelt man zur Grund-, Beta- und Gammabande jeweils drei neue also insgesamt 9 Banden, welche in der Mitte abgebildet sind. Rechts sind die drei untersten Banden negativer Paritaet zu sehen. Auch hier finden die drei Banden der α^- - Bewegung ihre Entsprechung. Die Basis ist aus Gruenden der Uebersichtlichkeit nicht vollstaendig abgebildet. Hoehere Gamma- bzw Betabanden fehlen, wurden aber bei der Rechnung beruecksichtigt.

Zur Diagonalisierung wurden 1200 Zustaende verwendet. Diese wurden allerdings nicht, wie in den letzten beiden Faellen nach der Gesamtenergie sortiert. Im Sortiervverfahren wurden die drei vordagonalisierten Spektren so skaliert, dass jeweils der erste 2^+ - bzw 1^- -Zustand den gleichen Abstand zum Grundzustand hatte. Die so berechnete Energie der gekoppelten Zustaende diente als Mass zur Auswahl der untersten 1200 Niveaus. Auf diese Weise konnten alle Koordinaten gleichberechtigt behandelt werden, und es ergab sich eine wesentlich bessere Konvergenz, als im Falle der Sortierung nach der tatsaechlichen Gesamtenergie, welche die α^- und $\tilde{r}$ - Freiheitsgrade zu sehr benachteiligt.

Wir kommen nun zur Darstellung der Resultate. Diese gliedert sich in zwei Abschnitte, in denen die Zustaende negativer und positiver Paritaet behandelt werden. Aus Gruenden der Rechenzeit wurden nur die untersten zehn Niveaus pro Drehimpuls und Paritaet berechnet. Das hat zur Folge, dass nur diejenigen Zustaende, welche der Grundbande entsprechen, einigermaßen vollstaendig wiedergegeben werden koennen.

Betrachten wir die unterste Bande negativer Paritaet. Sie ist in Figur 25 am linken Rand zu erkennen. Rechts davon ist

die Wirkung des Kopplungsterms C_1 dargestellt, fuer dessen Konstante die Werte 6, 12, 30 und 60 Mev gewaehlt wurden. Wie zu erwarten, wird die Symmetrie der Basiszustaeude teilweise aufgehoben. Es entstehen drei Banden, die fuer $C = 60$ Mev in Figur 26 gesondert abgebildet sind. Die Erklaerung liegt darin, dass es drei Moeglichkeiten gibt, die Drehimpulsvektoren der Grundbande und des 1^- -Relativzustandes zu addieren. Zuunterst liegen die Niveaus, bei denen beide Vektoren parallel sind. Damit ist der oben dargestellte Zweck des Kopplungspotentials erfuehlt. Wie schon im letzten Abschnitt (Figur 21), greifen die anderen beiden Banden so ineinander dass sich die Struktur einer γ -Bande ergibt. Da das Bildungsgesetz bekannt ist, konnten die Zustaeude mit $l > 7$, welche nicht berechnet wurden, ergaenzt werden.

Der Term C_2 hat keinen Einfluss auf die hier betrachteten Zustaeude negativer Paritaet, da er eine Kugelfunktion mit $l=4$ enthaelt, welche die 1^- -Zustaeude nicht untereinander zu koppeln vermag. Wir betrachten daher als naechstes den Term C_3 . In Figur 27 ist das Ergebnis fuer $C_3 = 60$ Mev angegeben. Auch hier bilden sich drei Banden aus, denen allerdings ein anderes Kopplungsschema zugrunde liegt. In diesem Fall sind alle Zustaeude entartet, bei denen der Winkel zwischen den Drehimpulsen von α^- - und Relativbewegung uebereinstimmt.

Fuer den Term C_4 gilt das gleiche wie fuer C_2 . Es bleibt nur noch die gemeinsame Wirkung von C_1 und C_3 oder, was auf dasselbe hinauslaeuft, das gesammte Wechselwirkungspotential $C_{\alpha\tau}$ zu untersuchen. Das Ergebnis fuer $C_{\alpha\tau} = 60$ Mev ist in Figur 28 abgebildet. Es gibt keine systematischen Entartungen mehr. Das Spektrum zeigt eine grosse Zahl von Rotationsbanden, deren Traegheitsmomente unterschiedlich sind, aehnlich wie im Fall der gekoppelten Rotatoren in Figur 14. Die beiden untersten Banden bilden offensichtlich Extremfaelle besonders grossen bzw kleinen Traegheitsmoments. Um etwas ueber diese Banden zu erfahren, wurden die groessten Basiskomponenten der jeweiligen Wellenfunktionen betrachtet. Daraus ergab sich, dass die unterste Bande durch fast parallel ausgerichtete Drehimpulsvektoren der drei Subsysteme gekennzeichnet ist. Bei der folgenden Bande sind die α^+ - und α^- -Drehimpulse antiparallel, waehrend der Relativdrehimpuls parallel zum α^+ -Drehimpuls liegt.

Damit wollen wir die Diskussion der Zustaeude negativer Paritaet abschliessen und uns dem Teil des Basispektrums zuwenden, der in Figur 25 in der Mitte abgebildet ist. Auch hier betrachten wir wieder nur die Niveaus, welche der Grundbande entsprechen. Es handelt sich dabei um drei Banden, die miteinander entartet sind, so dass man sie in Figur 25 nicht unterscheiden kann. Sie sind daher in Figur 29 noch einmal gesondert abgebildet. Links findet man die Niveaus, bei denen der erste Relativzustand positiver Paritaet angeregt ist, waerend sich die α^- -Bewegung im Grundzustand befindet. Dann folgen zwei Banden, welche auf Anregungen des α^- -Freiheitsgrades aufbauen.

Die Rechnungen ergaben, dass die Terme C_2 und C_3 den staerksten Einfluss auf diese Niveaus haben. Daher wurden Studien zu diesen beiden Komponenten des Kopplungspotentials angefertigt. Die Ergebnisse fuer den Term C_2 sind in Figur 30 zu sehen. Links sind die drei entarteten Banden der Basis abgebildet. Dann folgen die Ergebnisse der

Diagonalisierung fuer $C = 7.59, 15.18, 37.85, 75.89$ Mev. Die Entartungen sind nur teilweise aufgehoben, da C_2 eine Kugelflaechenfunktion mit $l=4$ enthaelt, welche fuer den Grundzustand der Relativbewegung kein diagonales Matrixelement liefert. Wechselwirkungen koennen nur zwischen den Zustaenden $\langle 1_1, 0_1, 2_1^+ |$ auftreten. Man sieht das am besten in Figur 31, die sich nur darin von Figur 30 unterscheidet, dass die Banden $\langle 1_1, 2_2, 0_1^+ |$ und $\langle 1_1, 4_1, 0_1^+ |$ weggelassen sind. Links sind die 5 Banden der Basis zu erkennen, welche auf dem 2_1^+ -Niveau der Relativbewegung aufbauen. Der Parameter C_2 bewirkt, dass daraus drei Banden werden. Ihre Koepe sind durch gestrichelte Linien miteinander verbunden. Zu dem 0^+ -Zustand fehlen die uebrigen Bandenmitglieder, da nur die zehn untersten Niveaus eines jeden Drehimpulses berechnet wurden.

In Figur 32 ist die Wirkung der gesamten Kopplung zwischen α^+ und $\tilde{r}$ dargestellt, soweit sie in $C_{\alpha r}$ enthalten ist. Der Vergleich mit Figur 30 zeigt, dass C_1 hauptsaechlich auf die zweite Gammabande wirkt.

Betrachten wir nun die Wechselwirkung zwischen α^- und r . Als der wichtigere Term erwies sich in diesem Fall C_3 . Daher wurde eine Studie angefertigt mit $C_3 = 6, 12, 30$ Mev, die in Figur 33 abgebildet ist. Am linken Rand ist wieder, wie in Figur 30, der entsprechende Teil des Basisspektrums abgebildet. Man erkennt, dass manche Zustaende nur wenig durch C_3 beeinflusst werden, waerend andere nach oben oder unten wandern. Die Erklaerung fuer dieses Verhalten zeigt sich in Figur 34. Dort ist der Fall $C_3 = 30$ fuer sich alleine dargestellt und in drei Banden aufgeteilt. Die Basiskomponenten der Wellenfunktionen weisen darauf hin, dass die Banden $\langle 1_1, 0_1, 2_1^+ |$ und $\langle 1_1, 2_2, 0_1^+ |$ miteinander wechselwirken und sich daher "abstossen". Die Niveaus $\langle 1_1, 4_1, 0_1^+ |$ koennen nur mit den energetisch hoeher liegenden Zustaenden $\langle 1_1, 2_2, 2_1^+ |$ und $\langle 1_1, 4_1, 2_1^+ |$ Matrixelemente bilden und werden daher nicht erkennbar beeinflusst.

C_4 fuer sich alleine hat keine Wirkung, solange er in der C_3 entsprechenden Groessenordnung bleibt, da er keine Matrixelemente zwischen den Niveaus der Banden $\langle 1_1, 0_1, 2_1^+ |$, $\langle 1_1, 2_2, 0_1^+ |$ und $\langle 1_1, 4_1, 0_1^+ |$ liefert. Wir wollen daher die Studien mit einer Darstellung der gesamten Wechselwirkung $C_{\alpha r}$ in Figur 35 abschliessen. Links ist das experimentelle und rechts das theoretische Spektrum aufgetragen.

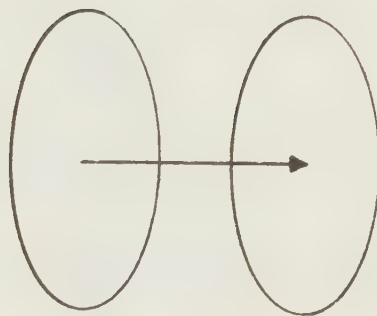
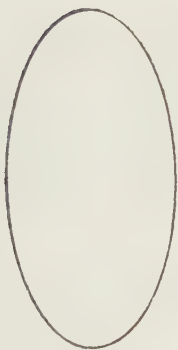
Die oben dargestellten Rechnungen koennen unter zwei Gesichtspunkten betrachtet werden. Der erste wurde schon formuliert. Es geht um die Frage, ob die 13 Freiheitsgrade unseres Modells mit den experimentellen Daten des Niederenergiebereichs vertraeglich sind. Mit den vorhandenen Mitteln wurde versucht, darauf eine Antwort zu geben. Die Ergebnisse zeigen, dass die verwendeten Kopplungsterme zu einer Aufspaltung der hochgradig entarteten Multiplets fuehren, und die vertraute Bandenstruktur entsteht. Die Banden liegen enger bei einander, als man dies im Allgemeinen in den Experimenten findet. Extrapoliert man die Rechnungen zu groesseren Kopplungsparametern hin, was die bisherigen Programme nicht leisten, so ist eine Uebereinstimmung von Theorie und Experiment denkbar. Insbesondere ist zu erwaenen, dass in den letzten beiden Modellen (Fig 24,35) die unterste Bande negativer Paritaet die richtige Spinfolge 1,3,5,... zeigt, was offensichtlich nicht selbstverstaendlich ist, wenn man die gekoppelten Rotatoren (Fig 15) betrachtet.

Auf der anderen Seite kann man die Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt von Spaltung bzw Fusion sehen. Unter diesem Blickwinkel kann man sich die stetig anwachsenden Kopplungsparameter der Figuren 25, 30, 33 und 34 verknuepft denken mit einem abnehmenden Relativabstand der beiden Fragmente. Insbesondere das Modell der gekoppelten Rotatoren duerfte fuer eine solche Betrachtungsweise geeignet sein. Figur 14 stellt den Extremfall zweier Fragmente dar, die frei umeinander kreisen und dennoch durch das Radialpotential als Molekuel verbunden sind, Ein Fall der sicher aufgrund der Coulombbarriere in der Natur nicht in dieser reinen Form auftritt. Das andere Extrem, zwei stark aneinander gekoppelte Rotatoren, wird durch Figur 15 repraesentiert. Ein solches Zwischenstadium waere im Laufe einer Streuung, Fusion oder Spaltung denkbar.

Die 13 Freiheitsgrade unseres Modells eroeffnen eine Fuelle von Anwendungsmoeglichkeiten, haben aber auch lange Rechenzeiten zur Folge, so dass man sich wiederum Beschraenkungen auferlegen muss. Diese Beschraenkungen hatten zur Folge, dass zwei interessante Modelle bisher nicht untersucht werden konnten. Zum einen kann man sich ein zweites Minimum grosser Deformation in der Naehel der Spaltbarriere (15) vorstellen, bei dem der r-Freiheitsgrad zum Tragen kommt und der Kern starke Biegeschwingungen durchfuehrt. Zum anderen waere es interessant, bei leichten Kernen Clusterstrukturen zu untersuchen. Zum Beispiel gibt es Anzeichen fuer Molekuelbanden im System $^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$ (16). Damit verbunden waere der Wunsch nach der Ankopplung des Kontinuums, um Streuprobleme behandeln zu koennen.

Fuer die Behandlung weiterer Faelle ist es jedoch wichtig, die numerische Methode wesentlich zu beschleunigen. Dafuer bestehen gewisse Aussichten, wenn man die Abspeicherung und Auffindung der Vektorkopplungskoeffizienten effizienter gestaltet und durch bessere Auswahl der Basiszustaeude zu kleineren Matrizen gelangt.

$$\alpha^- = 0 \quad \curvearrowright \quad \alpha_1 = \alpha_2$$



$$\alpha^+ = 0 \quad \curvearrowright \quad \alpha_1 = -\alpha_2$$

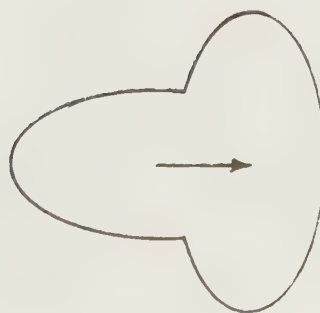
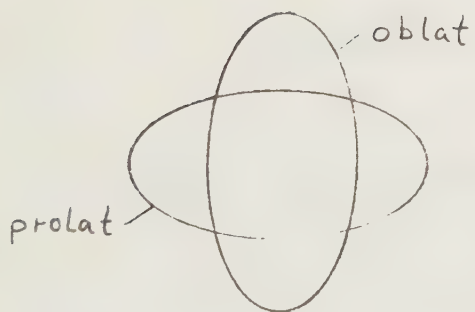


Fig.4

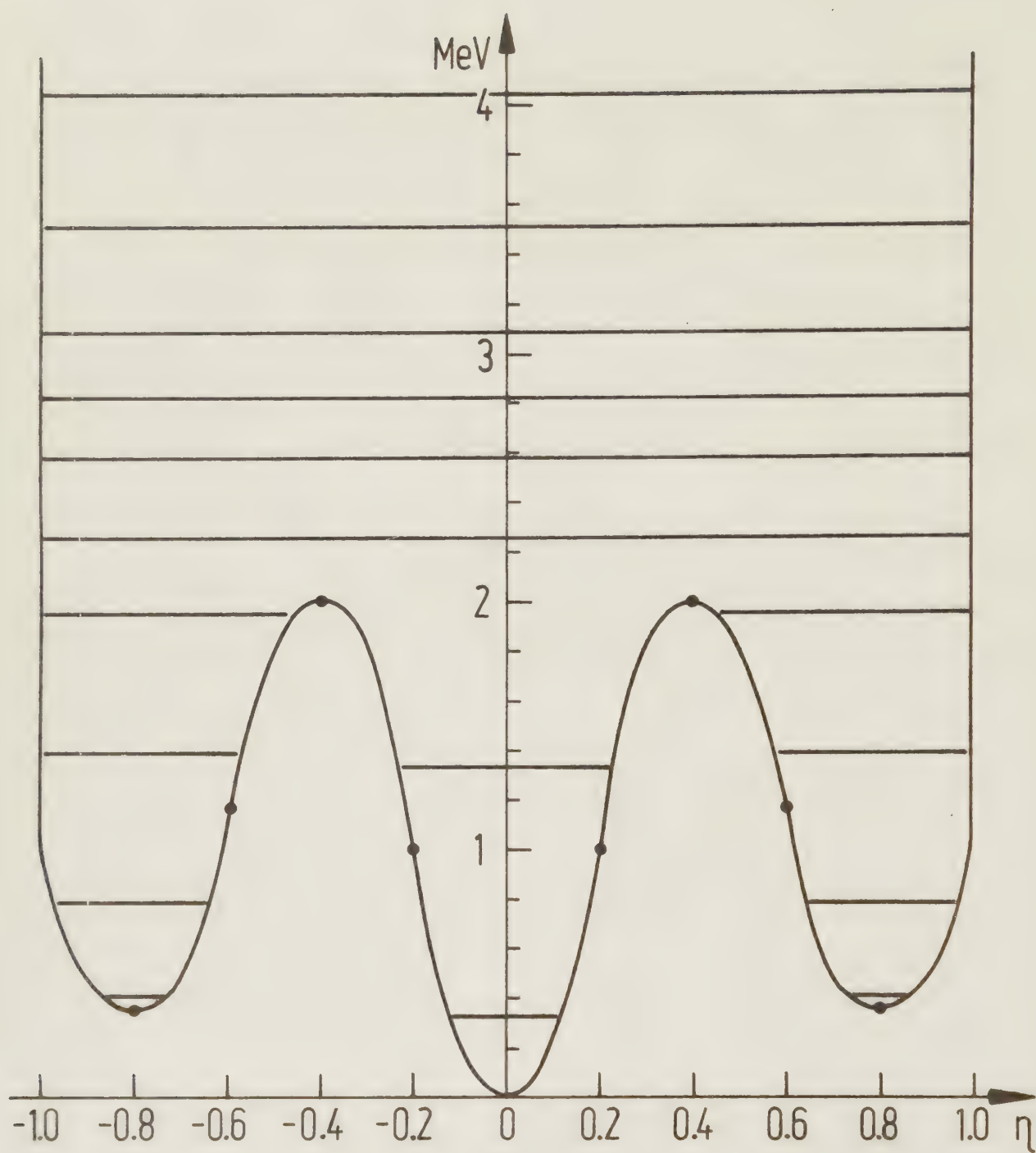


Fig.6

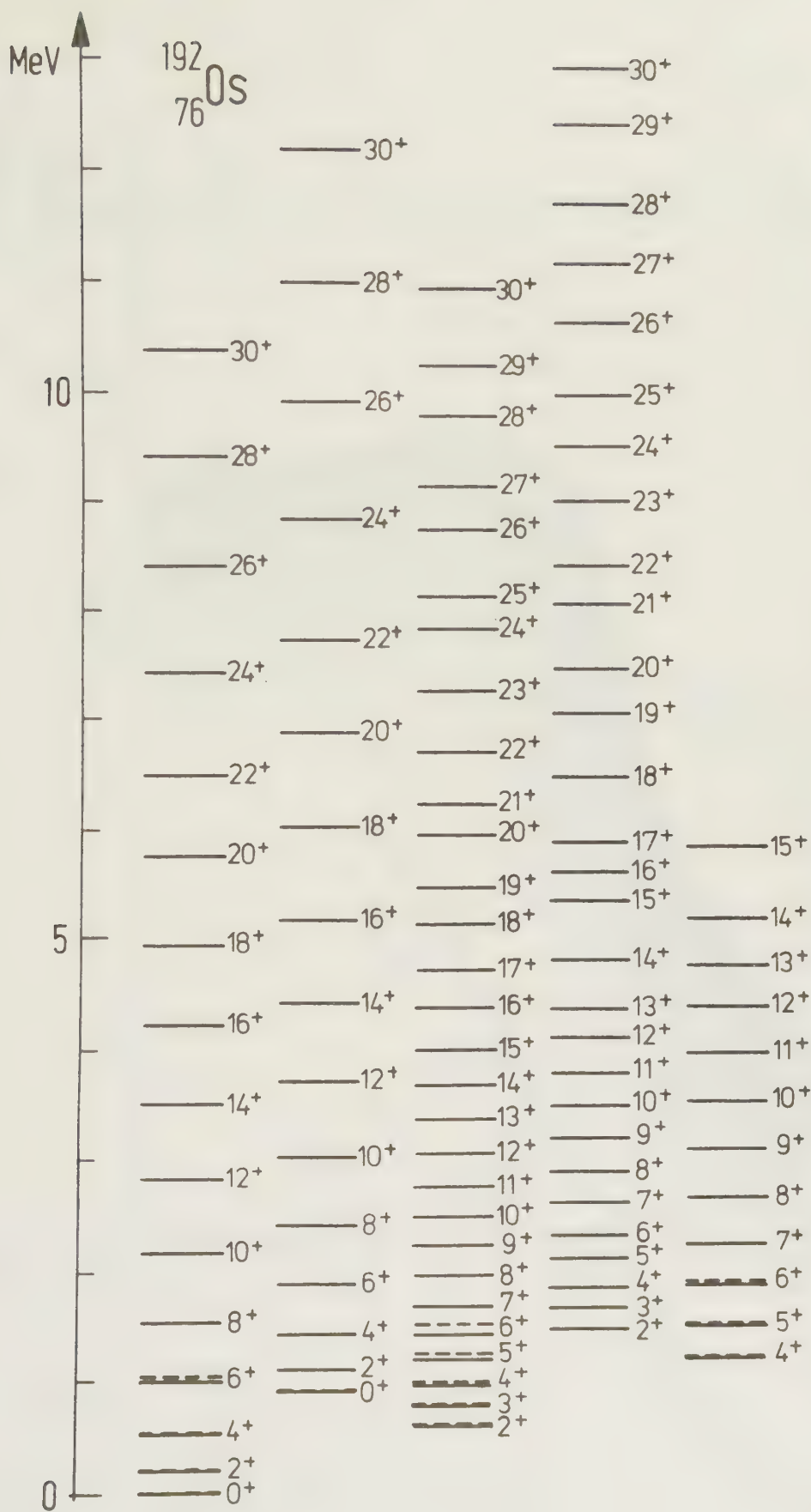


Fig.7

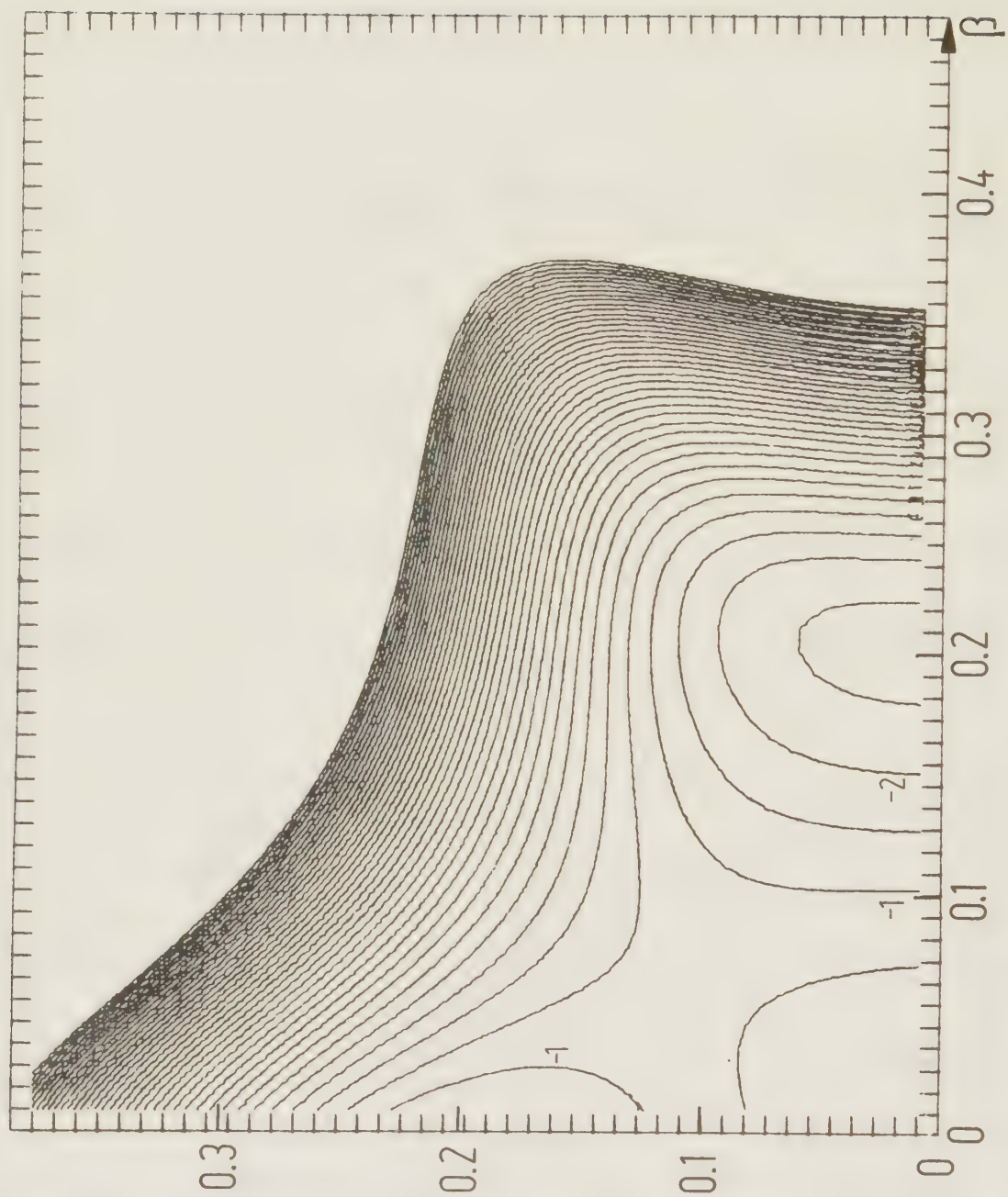


Fig. 7a

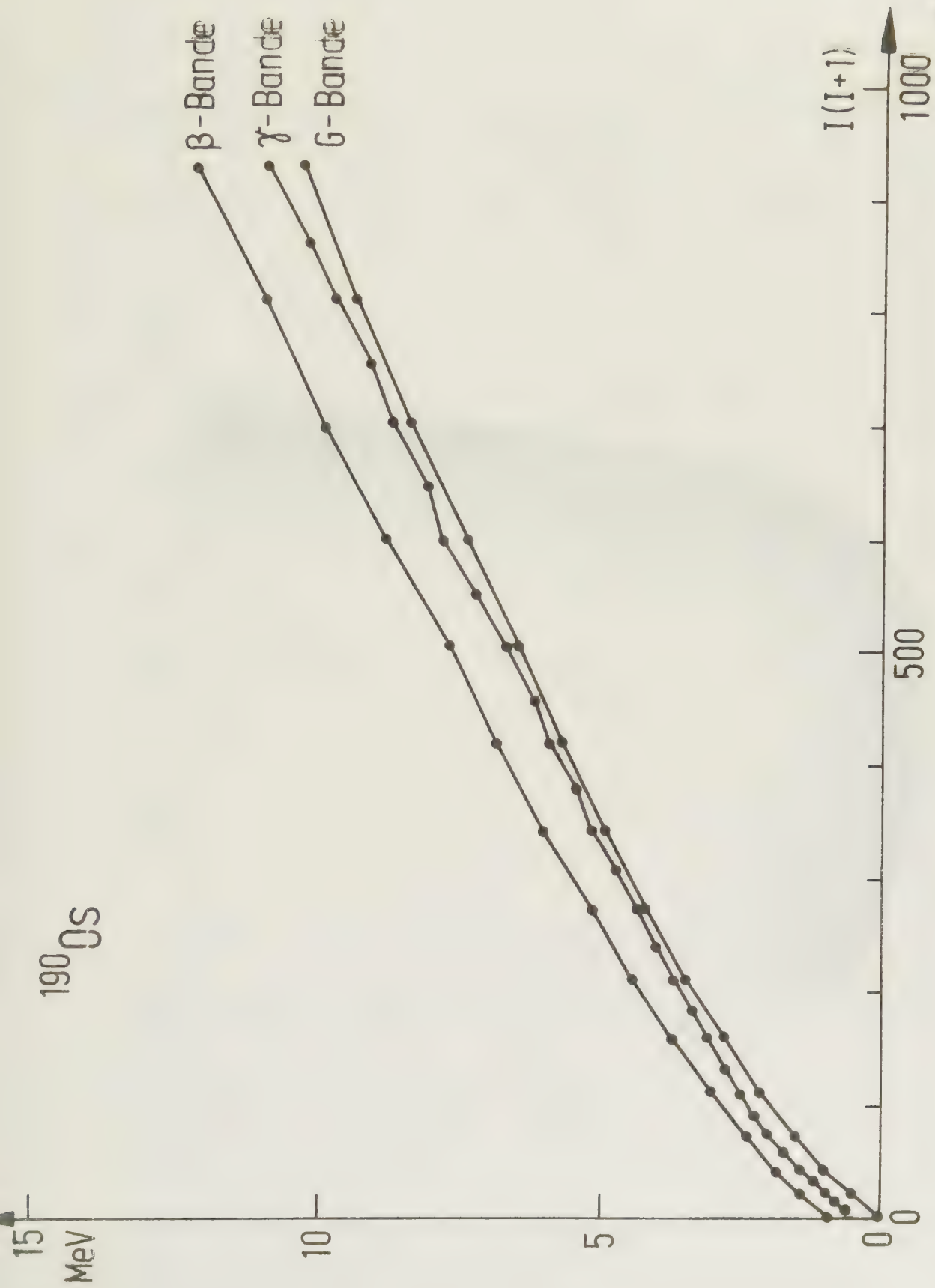


Fig.8

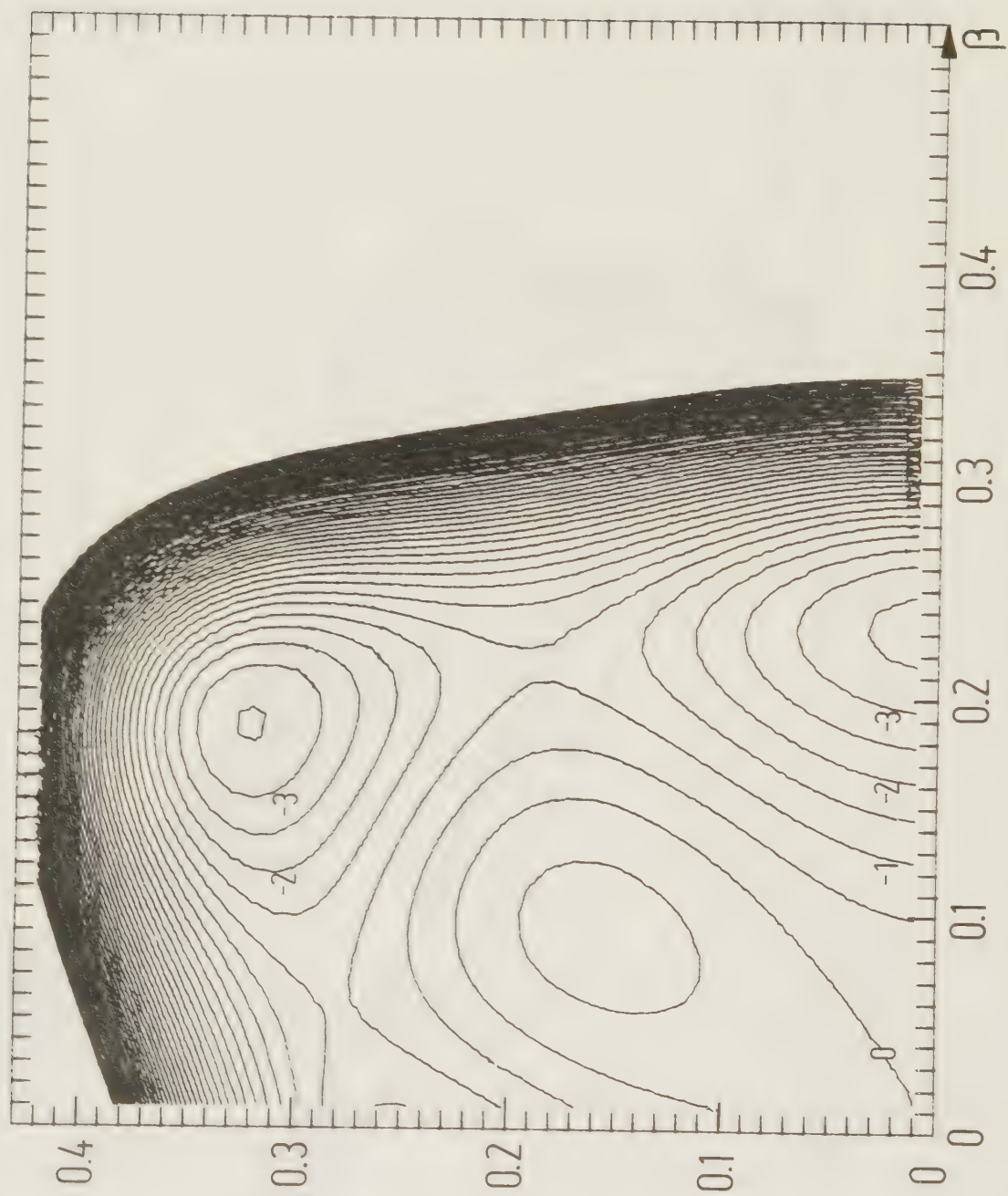


Fig. 9

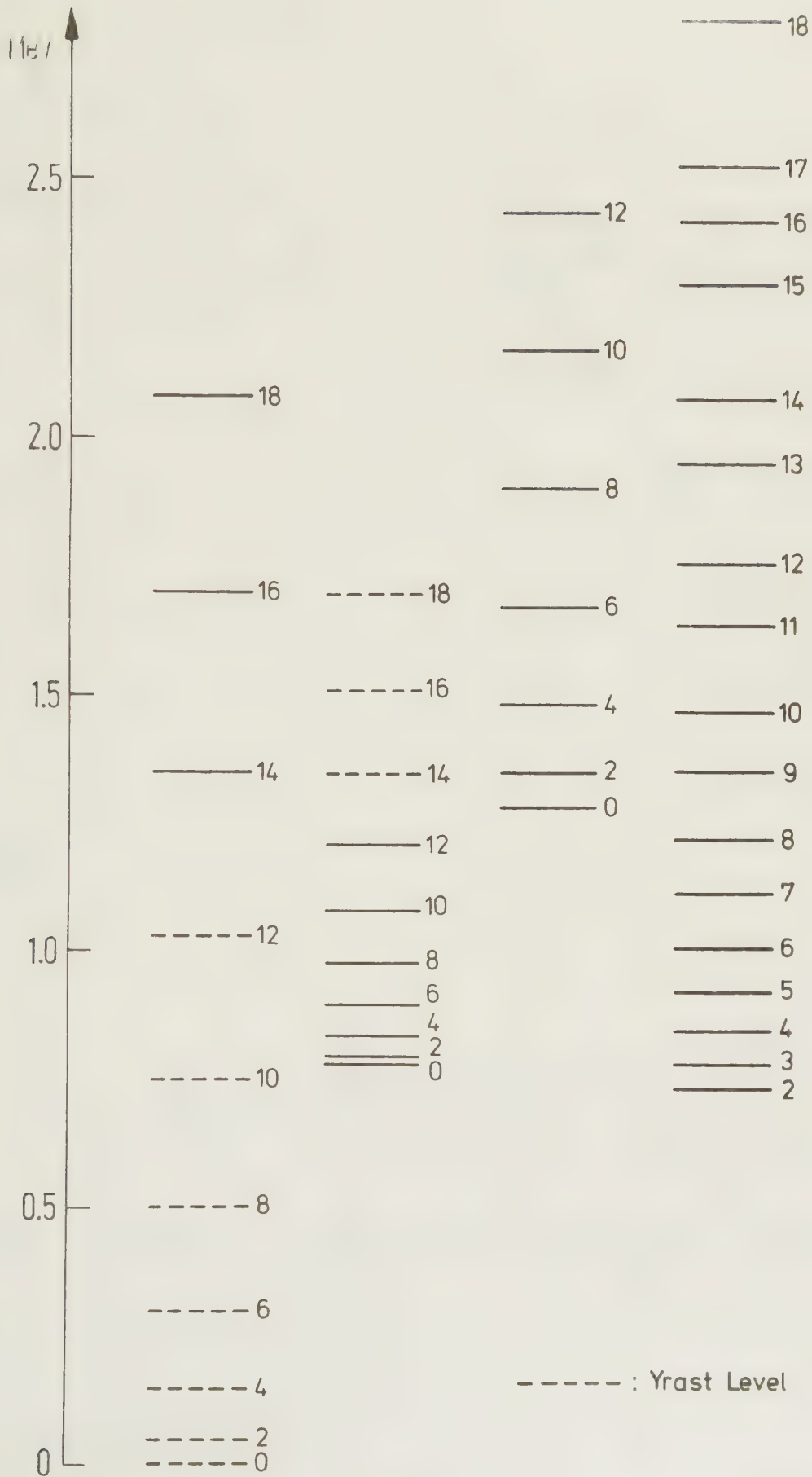


Fig.10

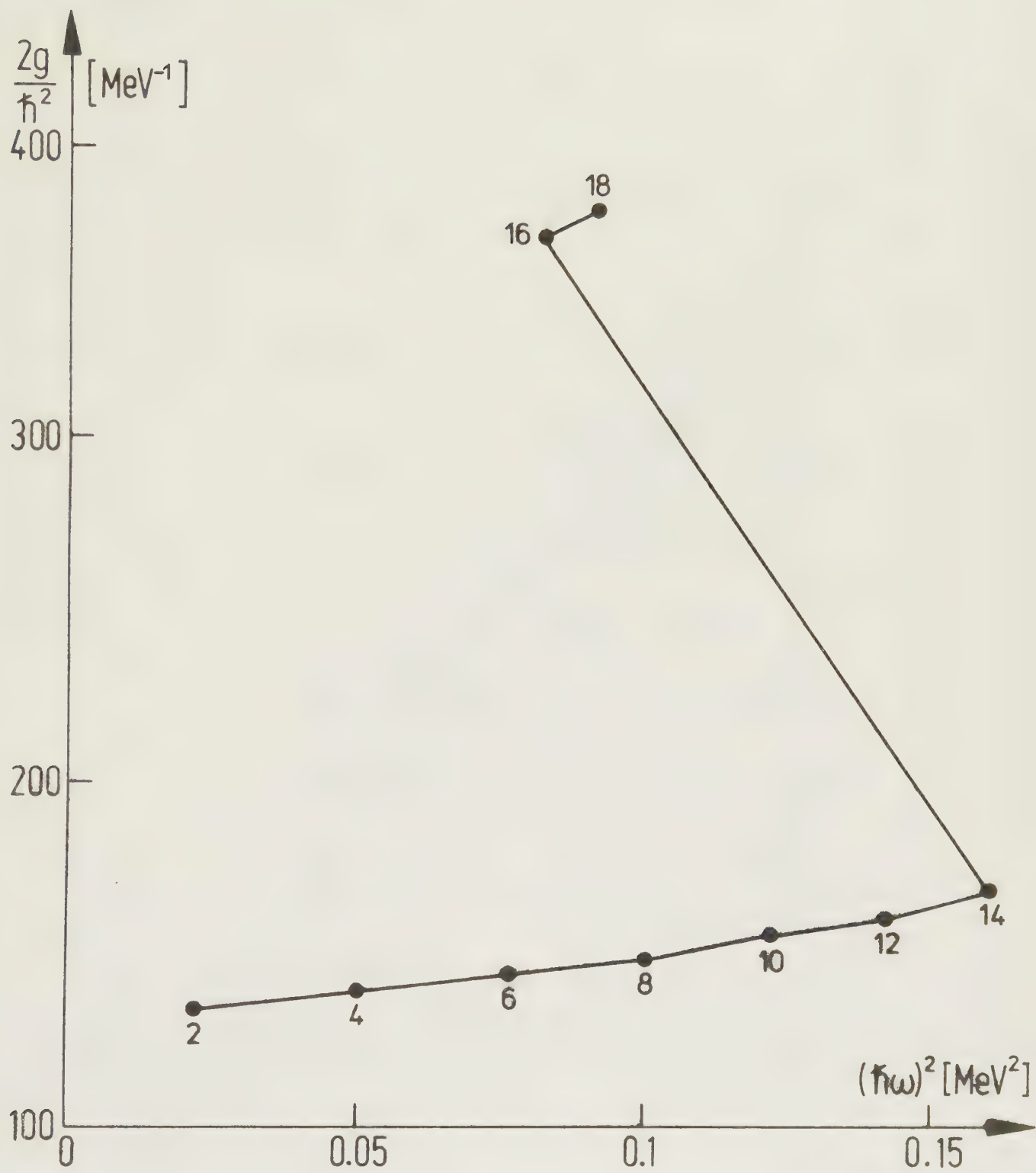
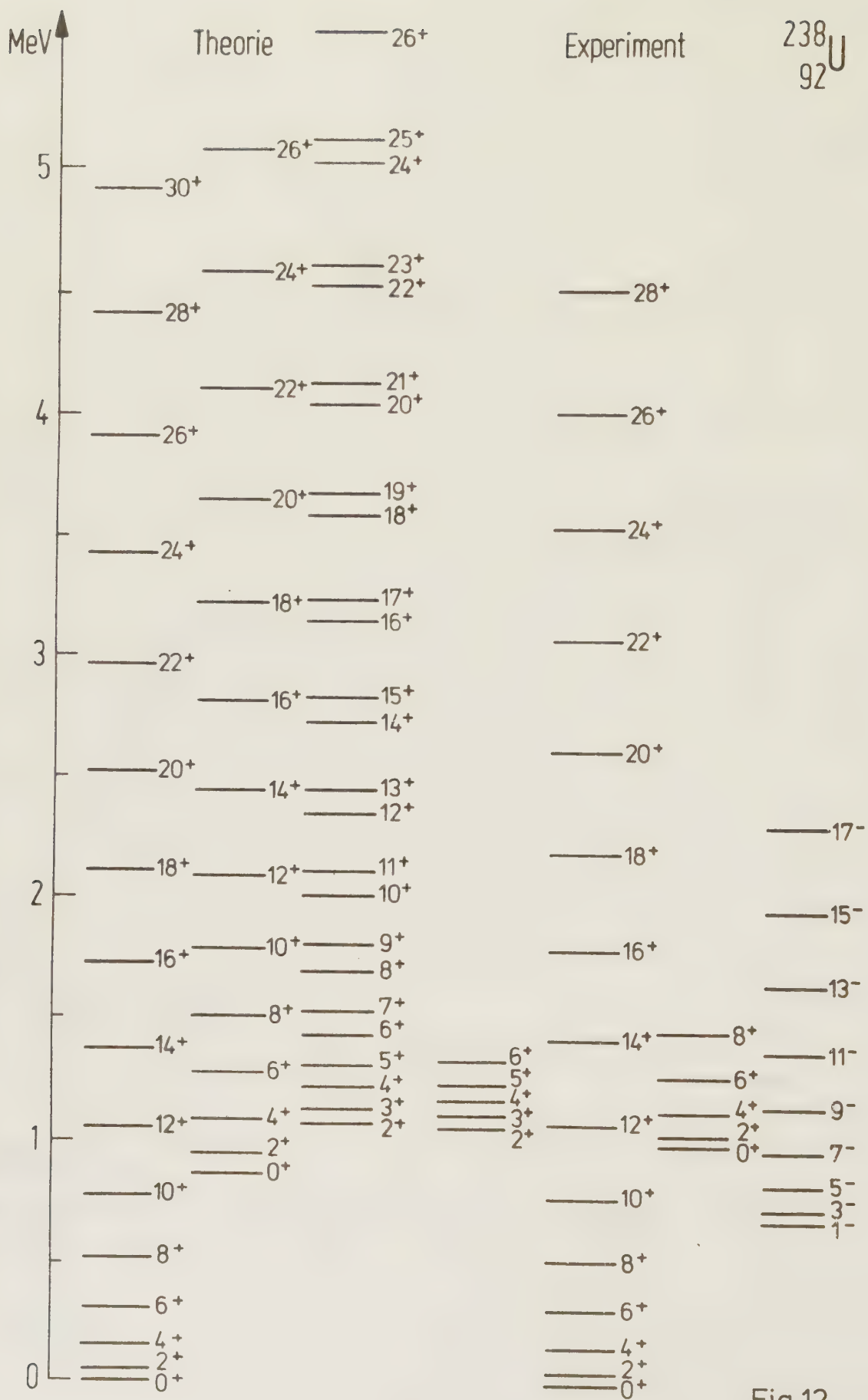


Fig.11



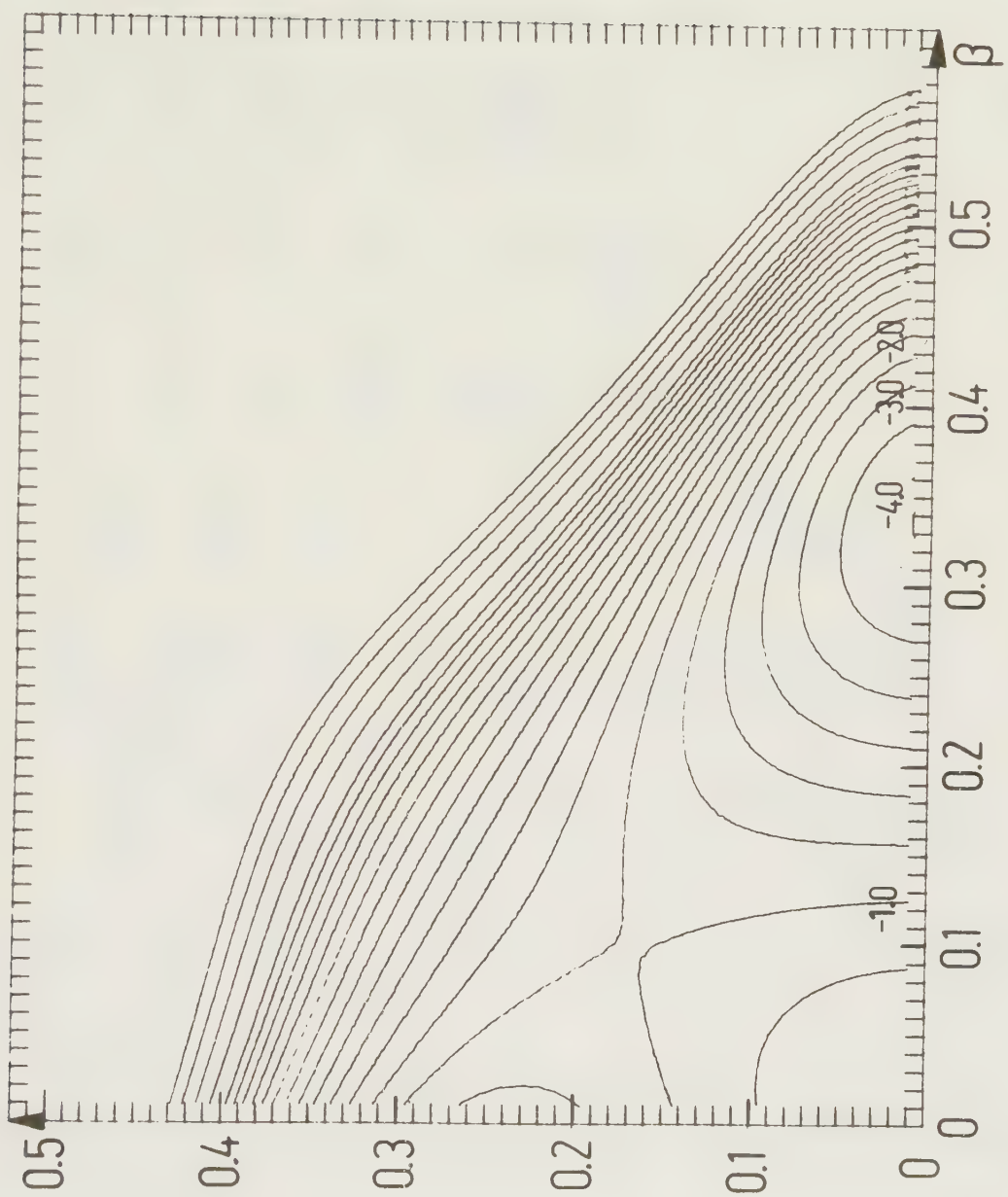


Fig.12a

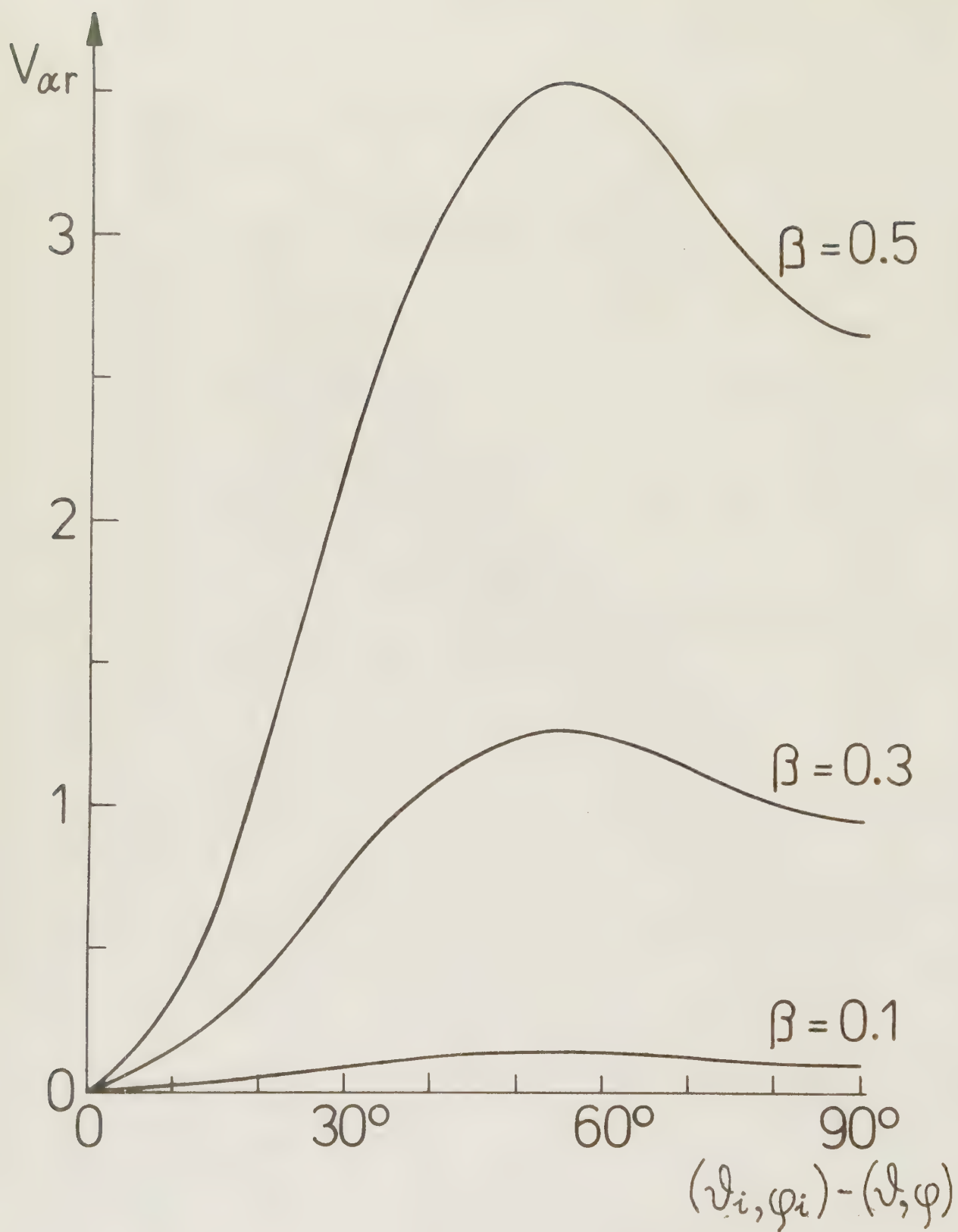


Fig.13

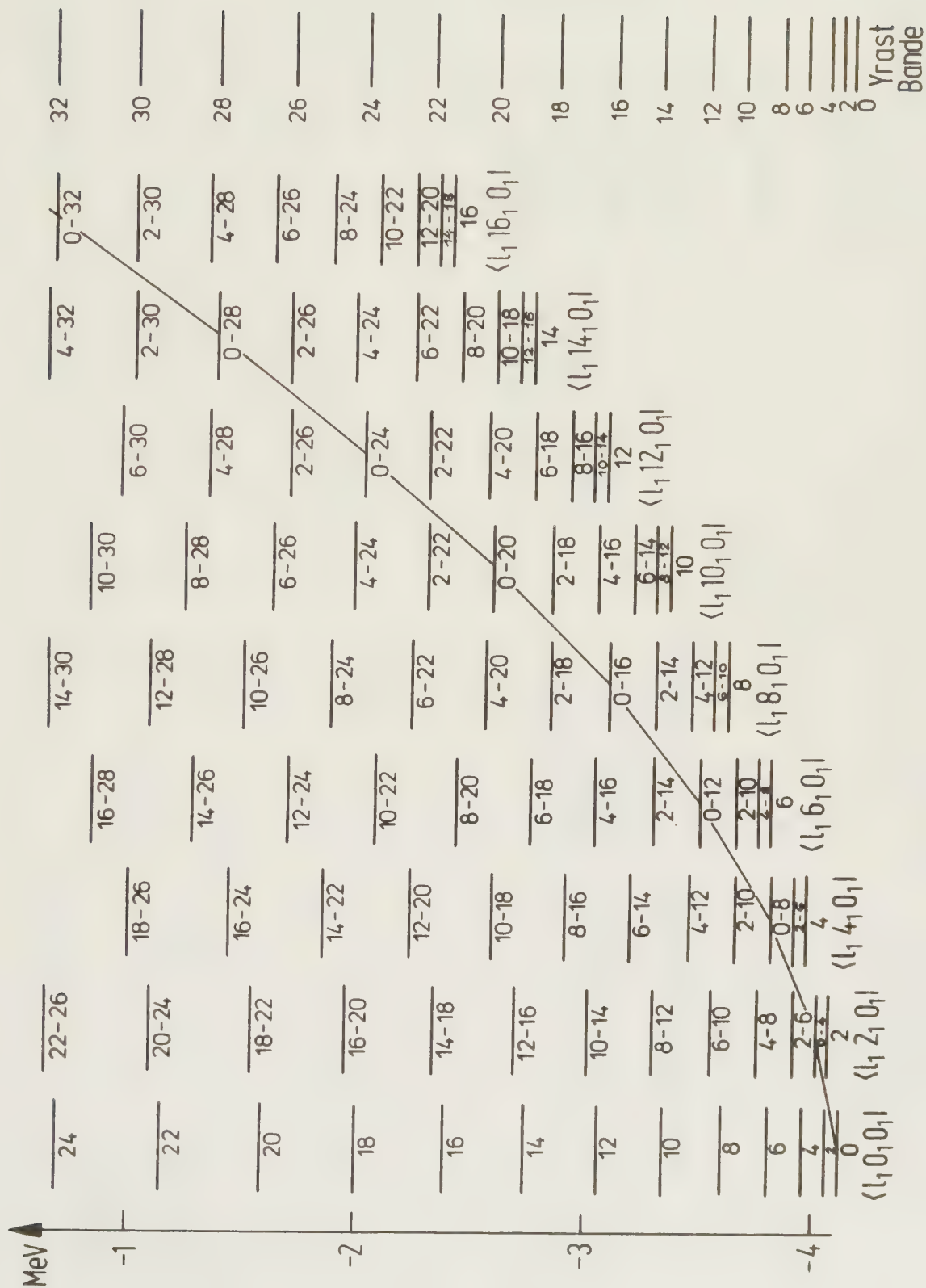


Fig.14



Fig.15

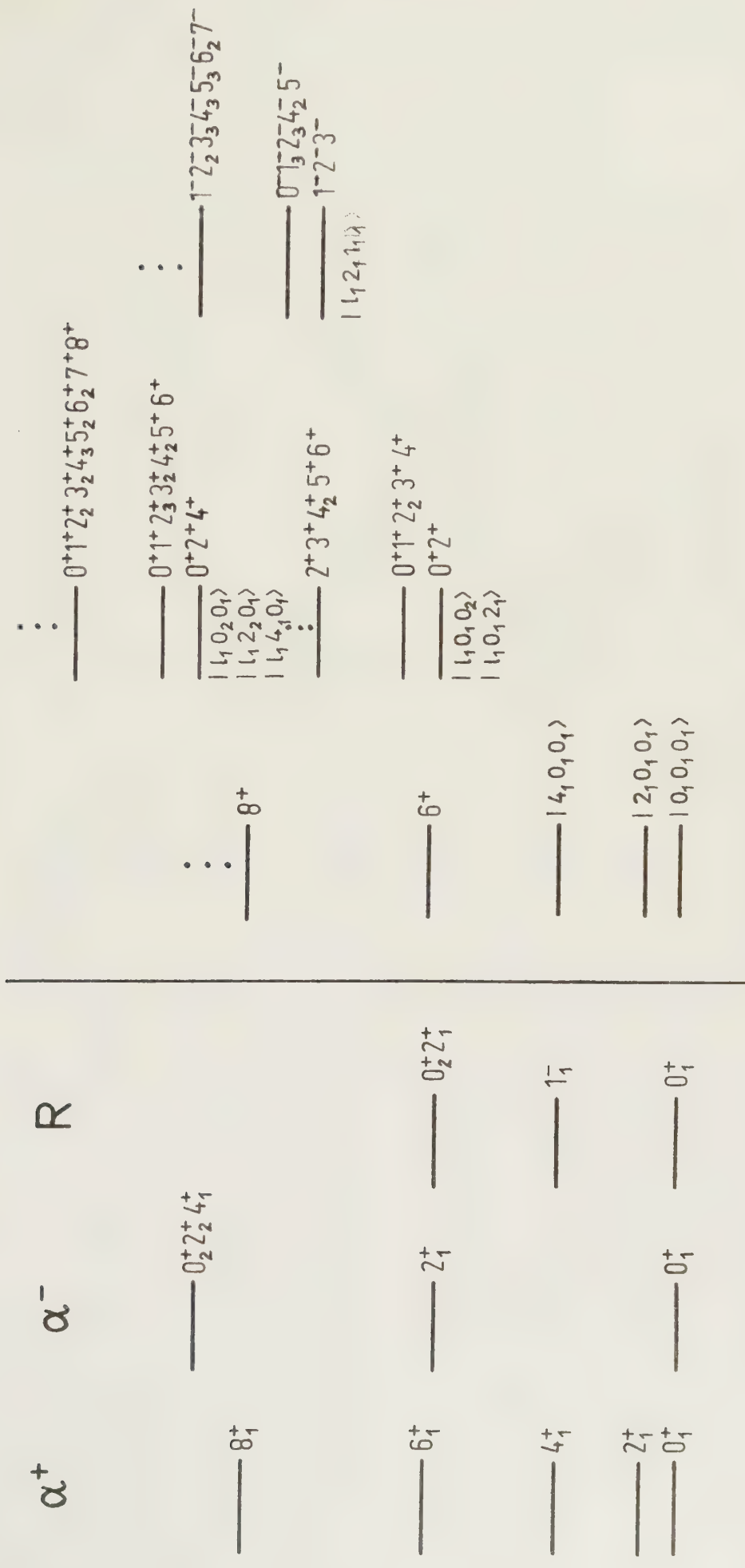


Fig.16

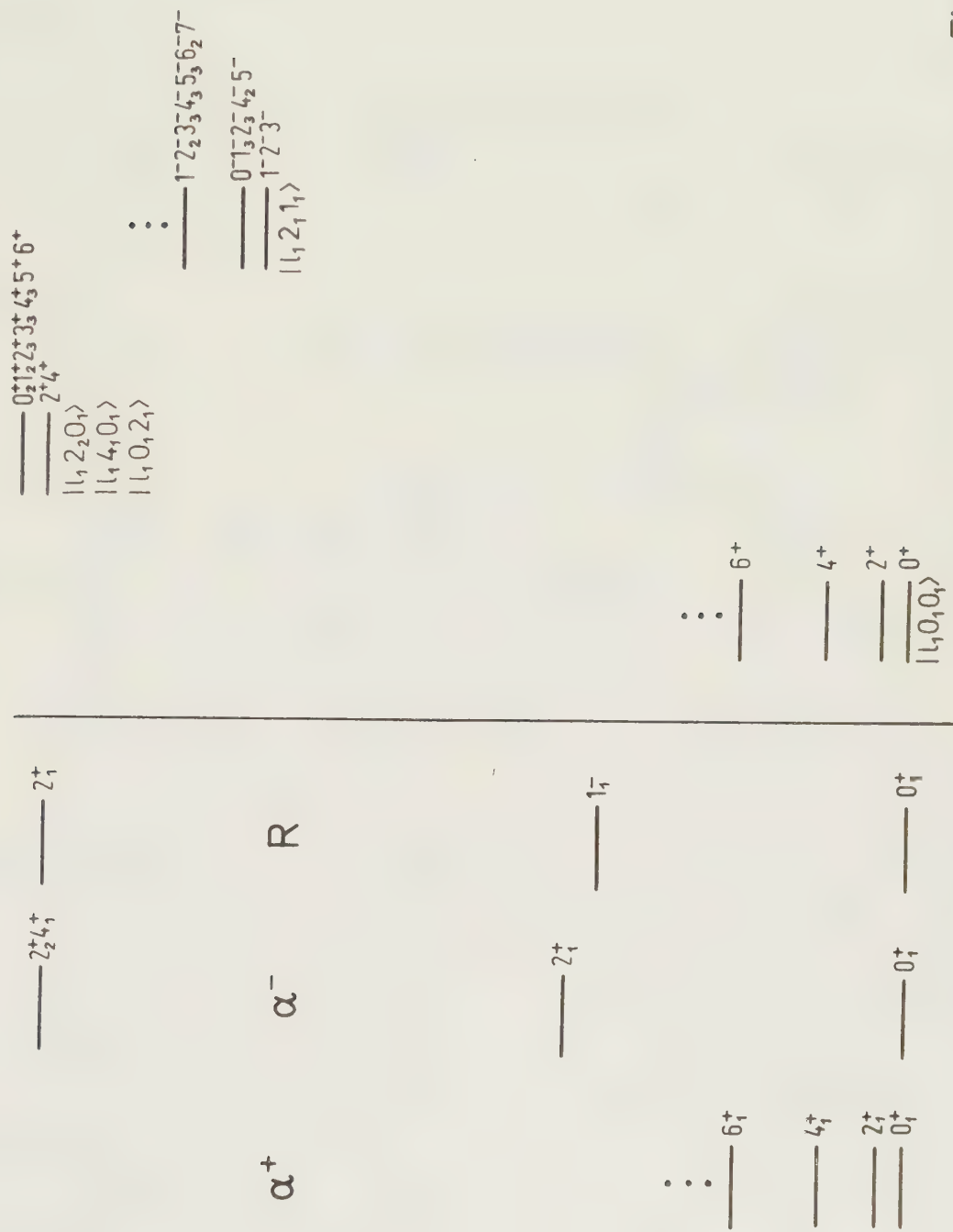


Fig. 18

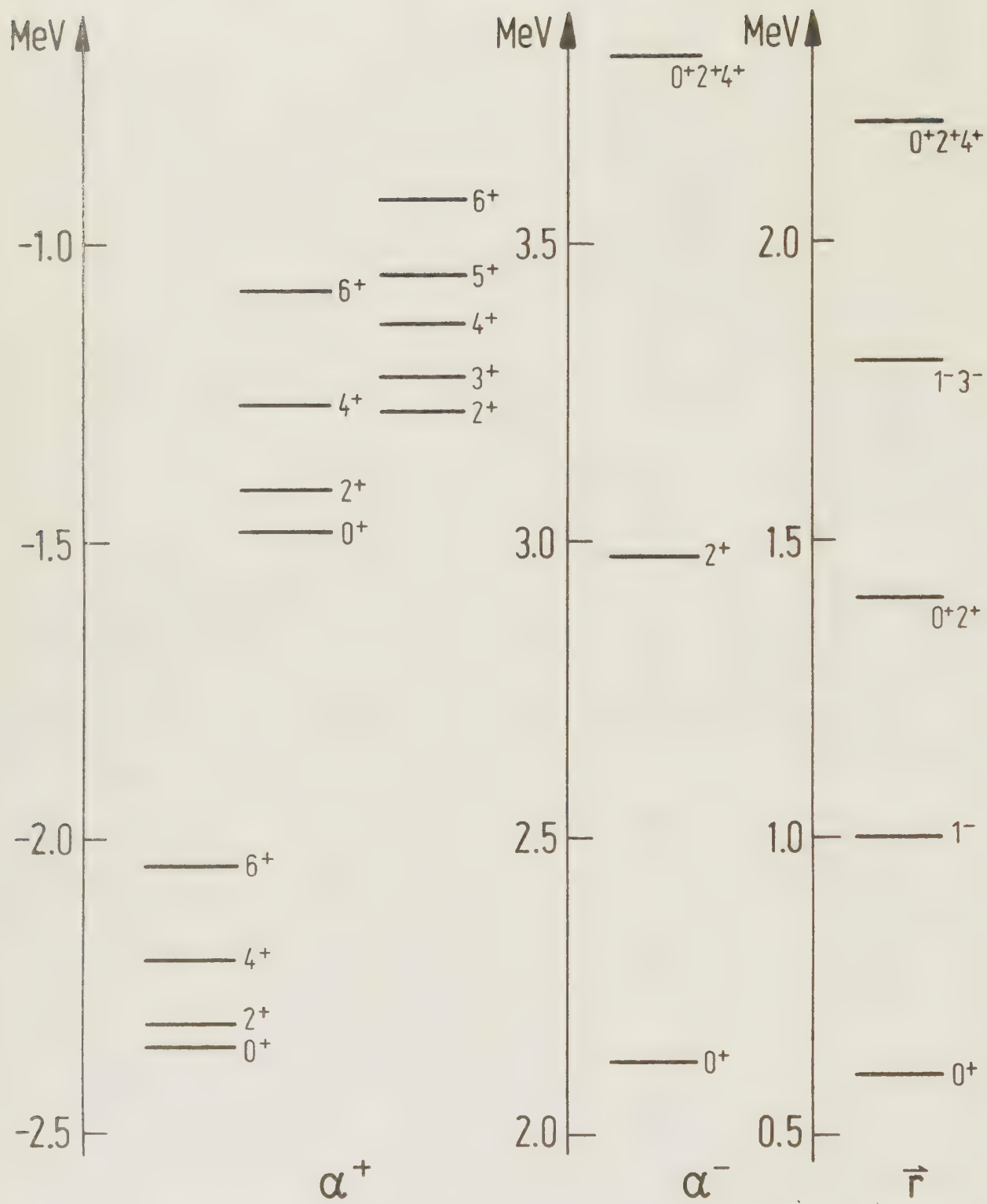


Fig.19

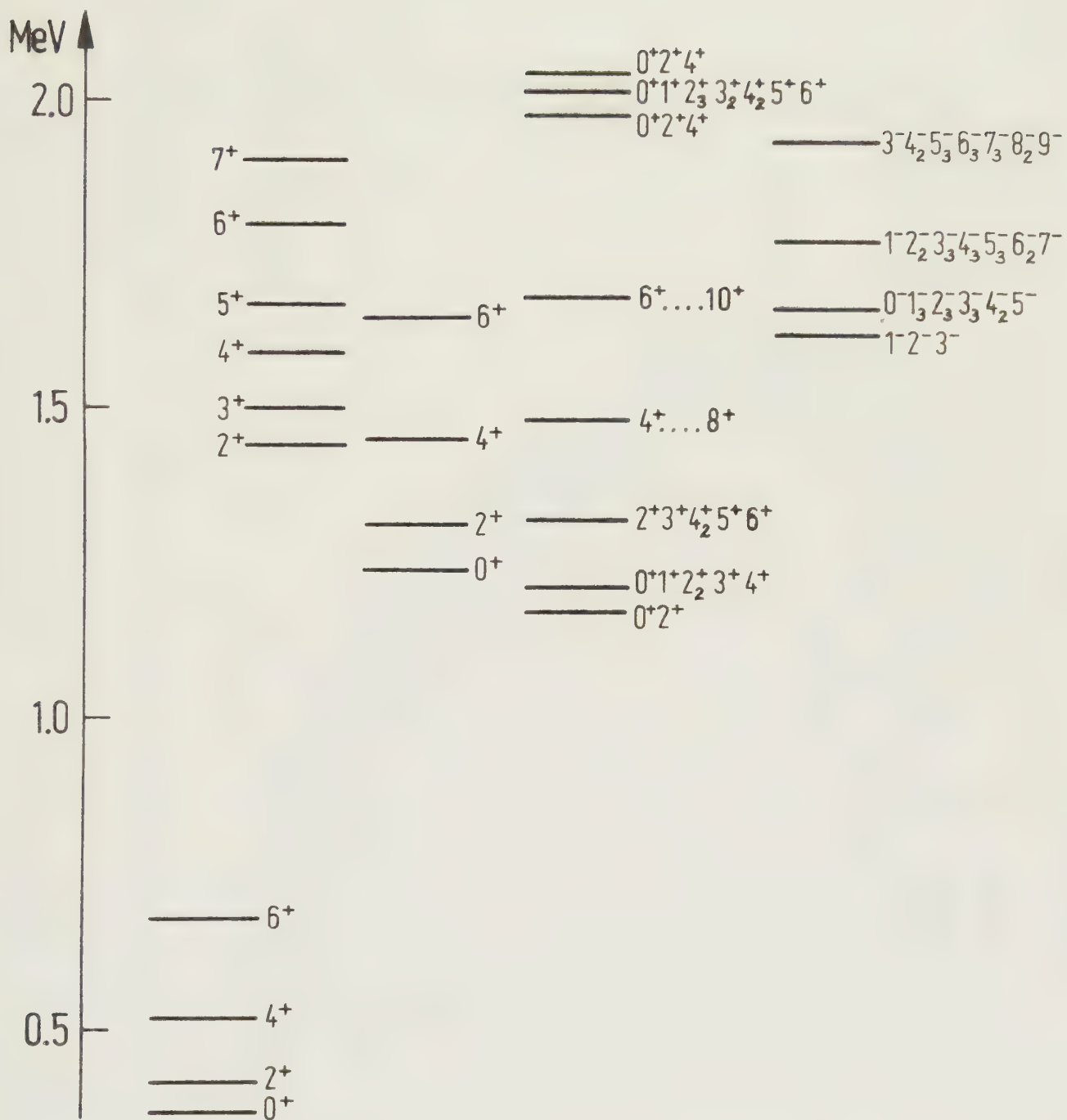


Fig.20

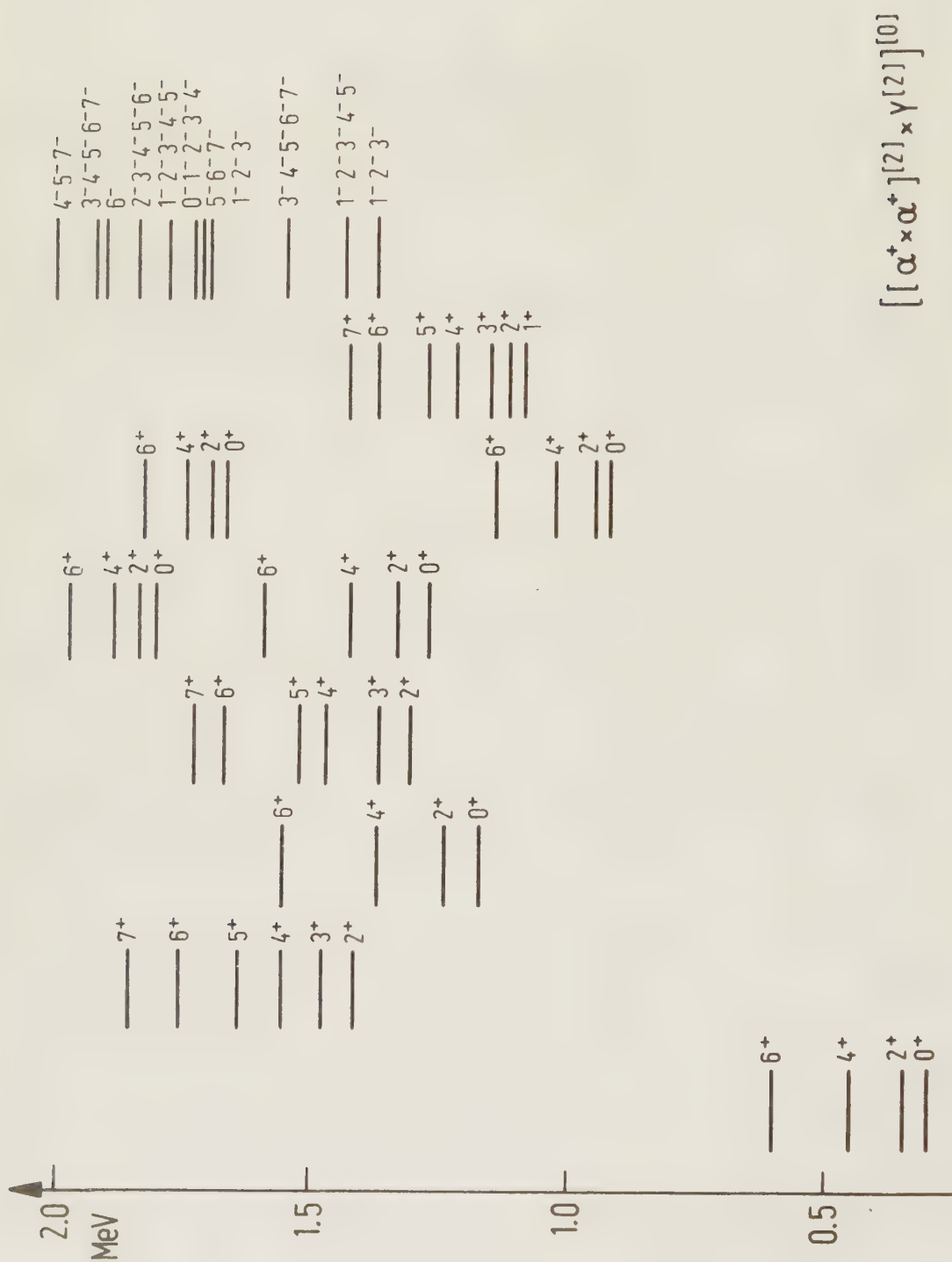


Fig.21

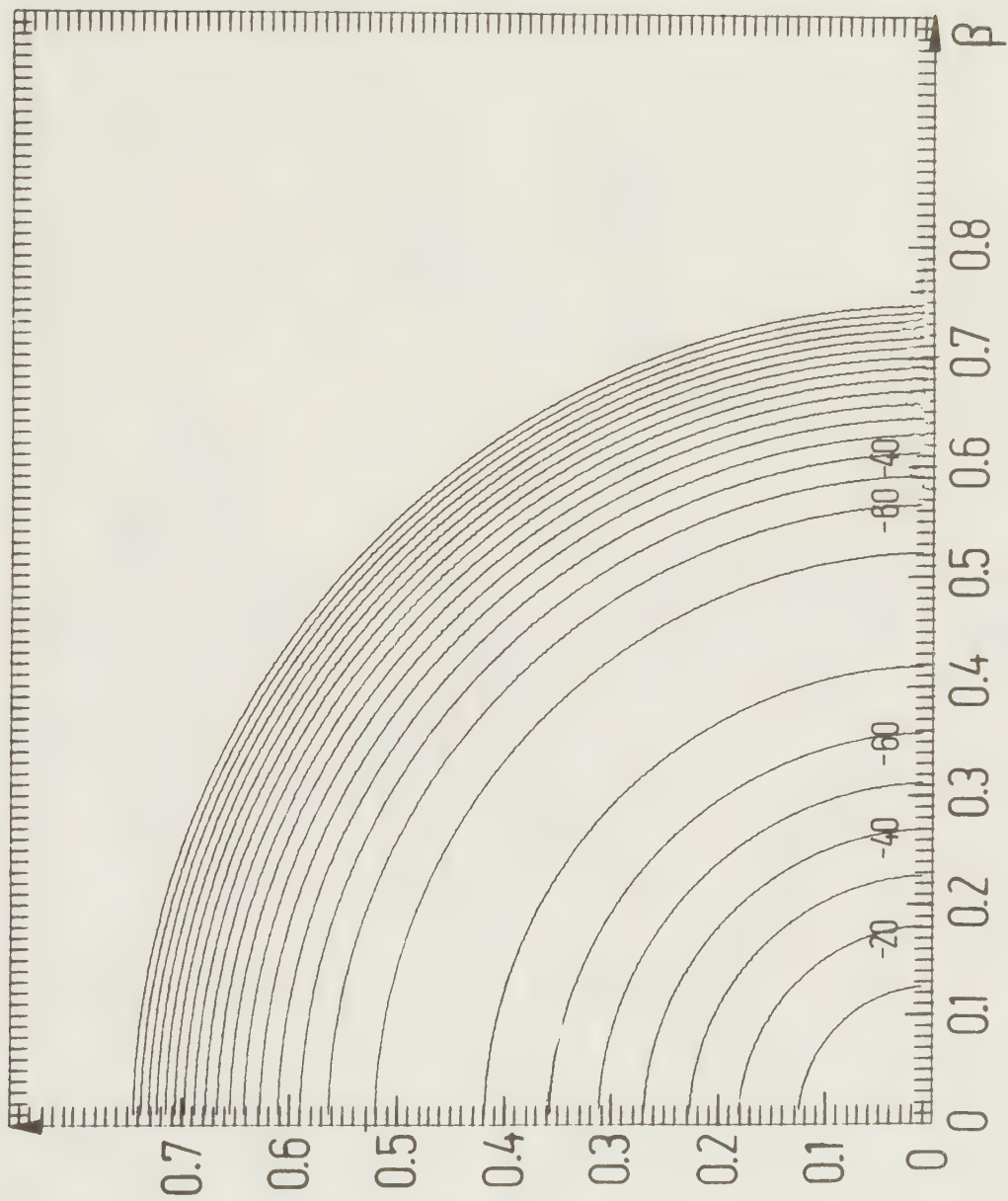


Fig.22

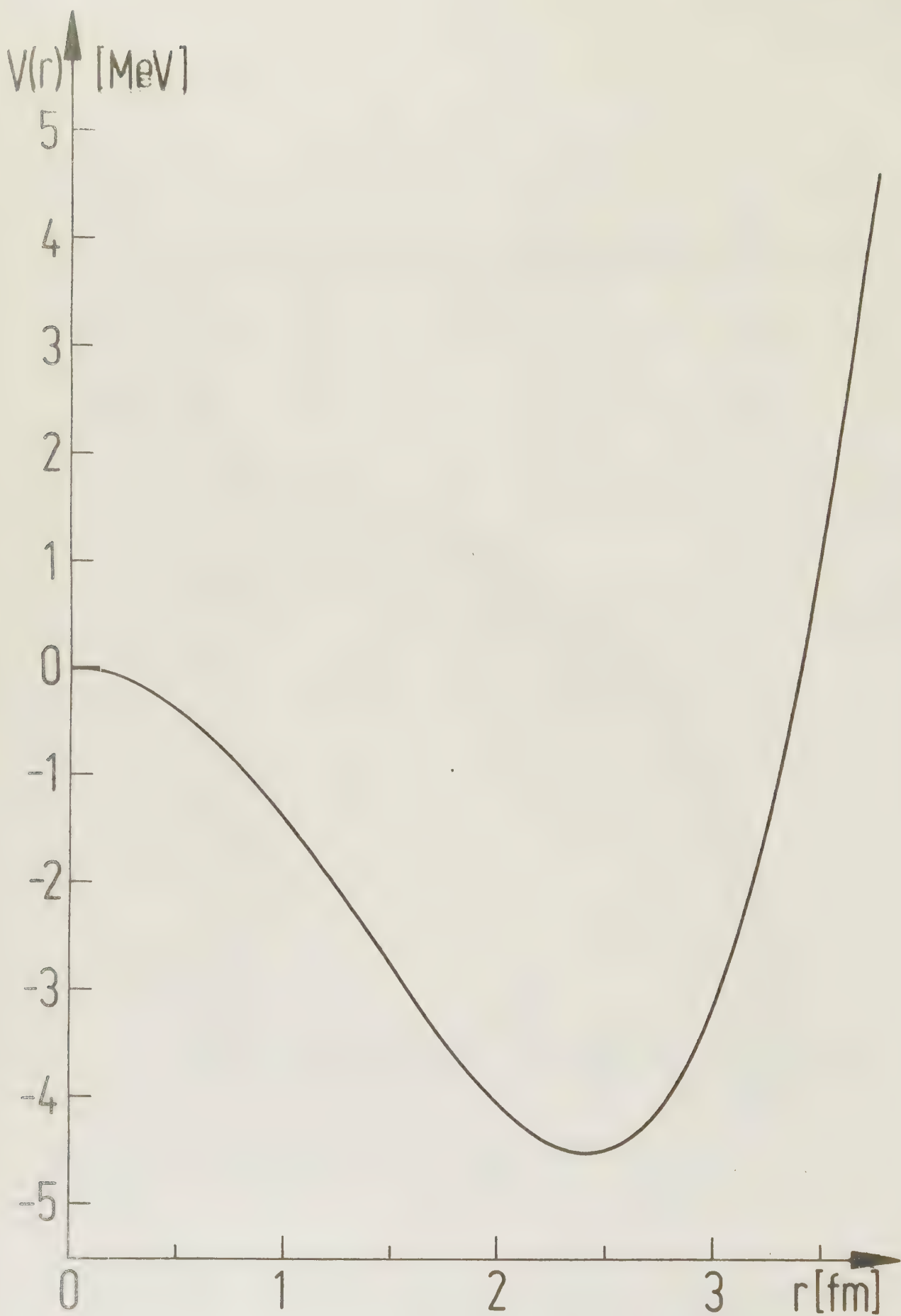


Fig. 23

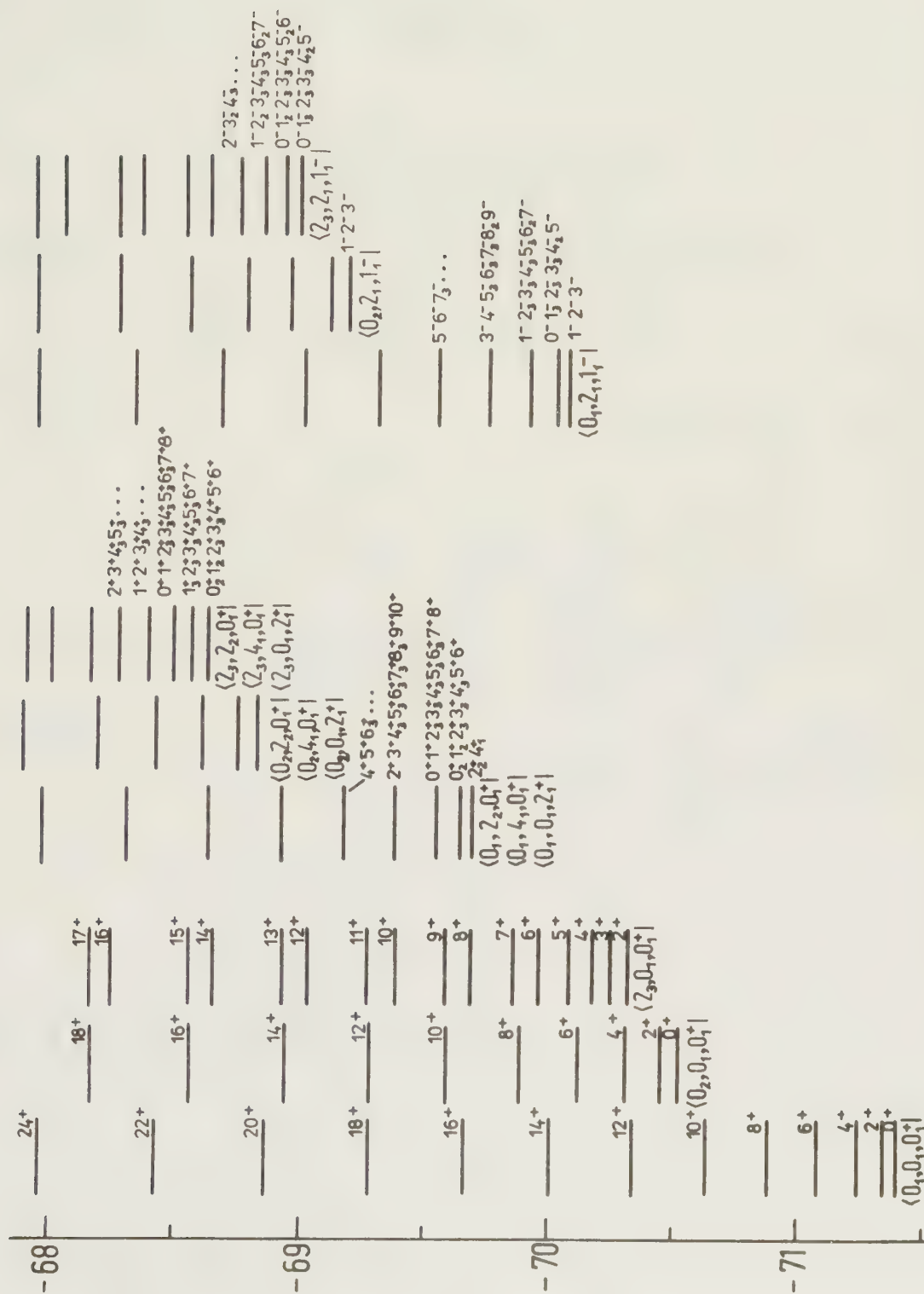


Fig. 24

$$[[\alpha^+ \times \alpha^+]^{[2]} \times \gamma^{[2]}]^{[0]}$$

17

— 6-7 —

71

7

7-

—5-6-7-

67-

5-6-7-

—3-4-5-6-7-

7-5-5-7

3-4-5-6-7-

1-2-3-4-5-6-7-

2-3-4-5-6-
1-2-3-4-5-6-7-

7-2-3-1-5-6-7-

0-1-2-3-4-5-

01-23-45-

1-2-3-4-5-

1-2-3-4-5-

1-2-3-

$\langle L, Z, 1 \rangle$

$$l_1 = 0, 2, 4, \dots$$

—5-6-7-

4-5-6-7-

3-6-5-6-7-

— — — — —

1-2-3-4-5

0-1-2-3-4-

— 0 1 2 3 4
1-2-3-

—5-6-7-

— 3-4-5-6-7-

1-2-3-4-5-

1-2-3-

Fig. 25

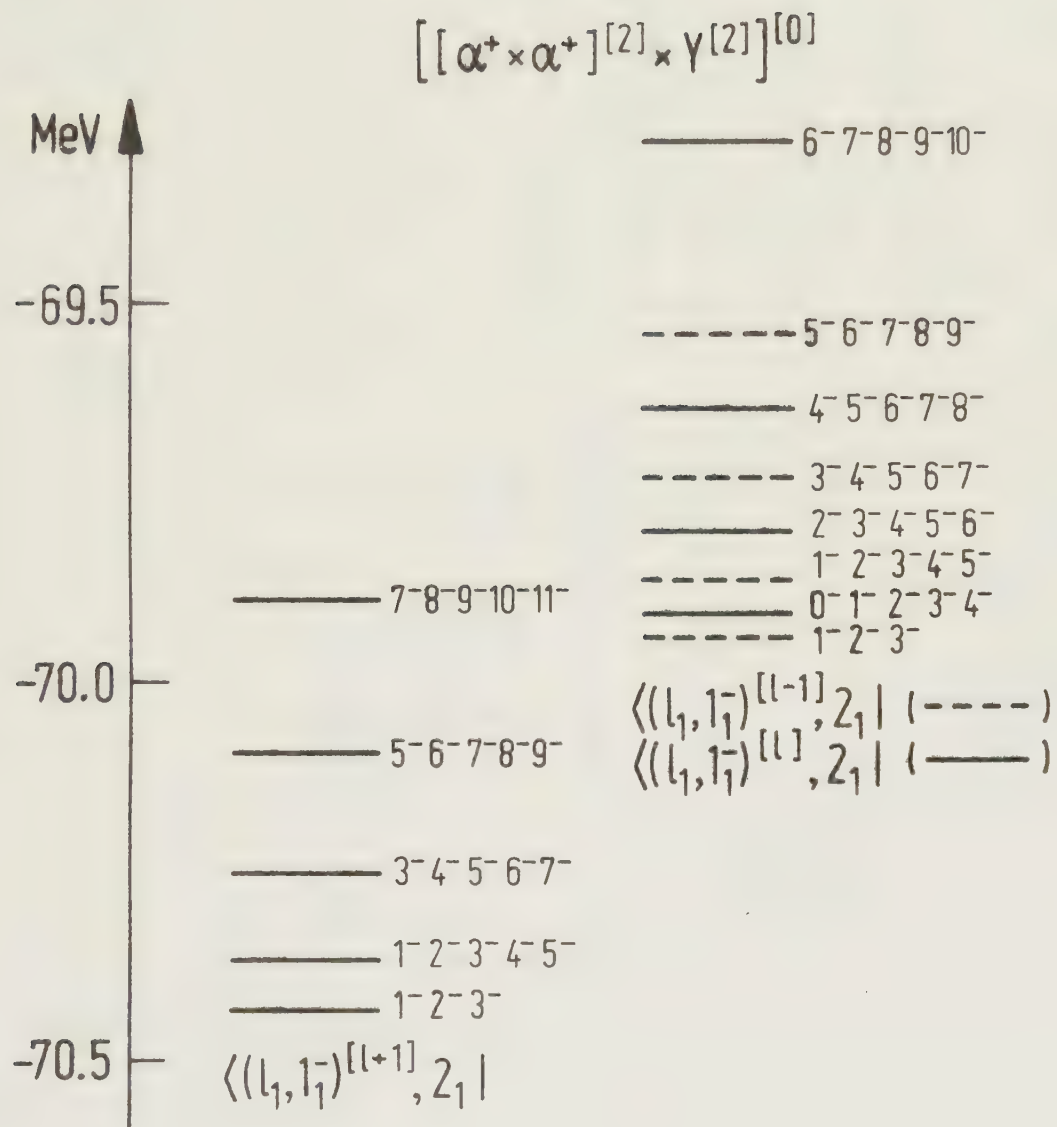


Fig.26

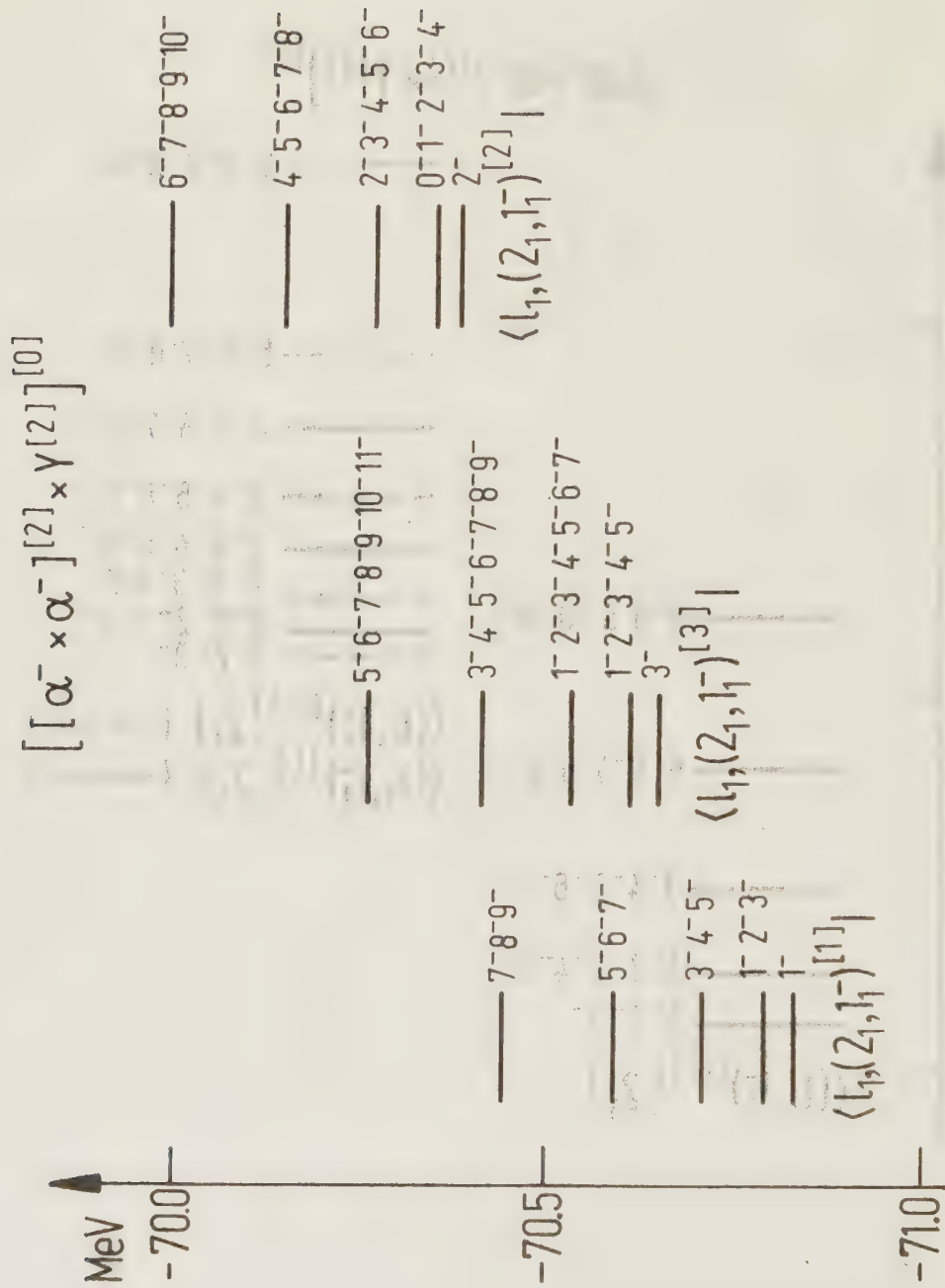


Fig. 27

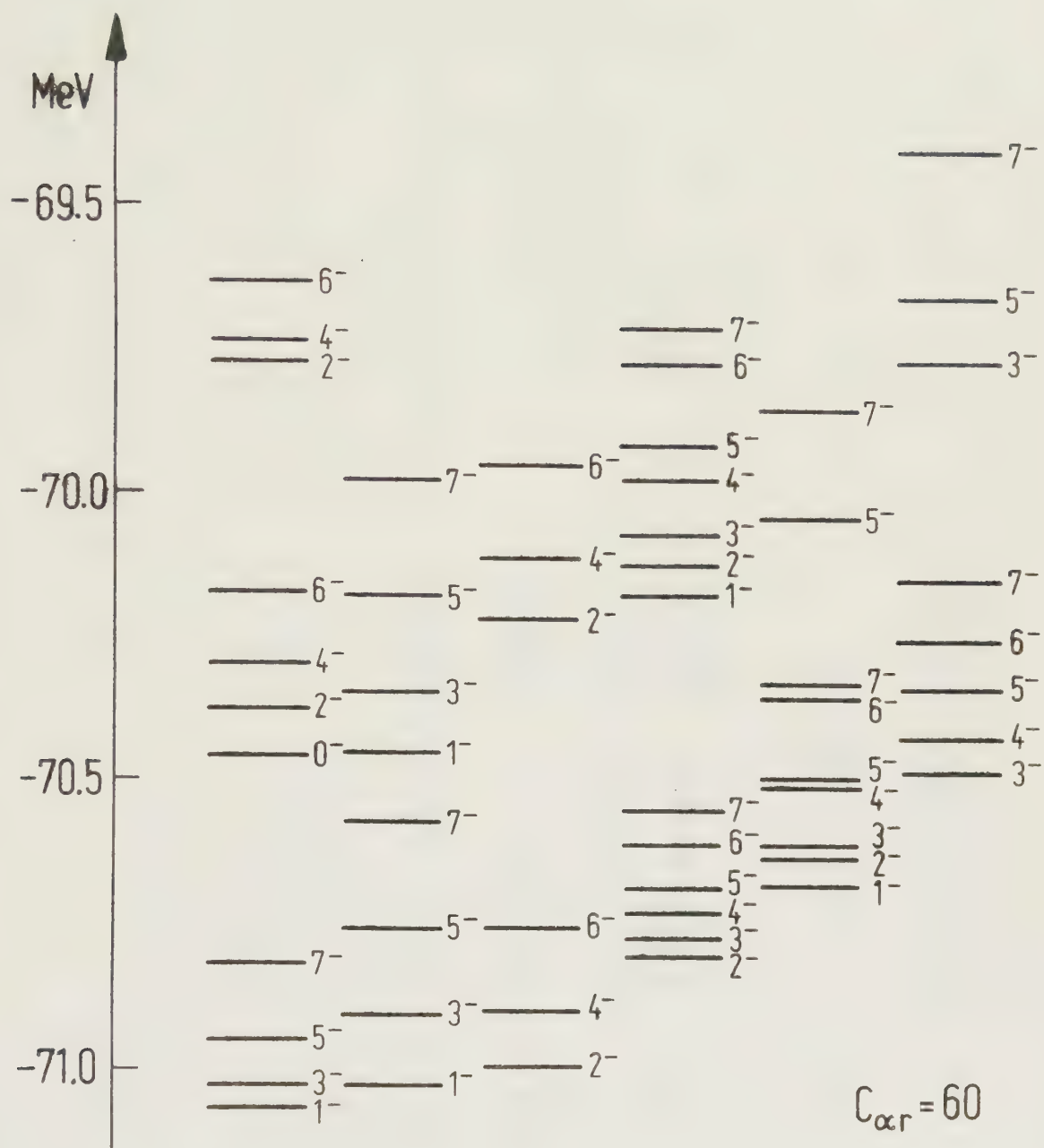


Fig.28

Multiplets positiver Parität

— $8^+ \dots 12^+$	— $8^+ \dots 12^+$	— $6^+ \dots 14^+$
— $6^+ \dots 10^+$	— $6^+ \dots 10^+$	— $4^+ \dots 12^+$
— $4^+ \dots 8^+$	— $4^+ \dots 8^+$	— $2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+ 7^+ 8^+ 9^+ 10^+$
— $2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+$	— $2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+$	— $0^+ 1^+ 2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+ 7^+ 8^+$
— $0^+ 1^+ 2^+ 3^+ 4^+$	— $0^+ 1^+ 2^+ 3^+ 4^+$	— $2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+$
— 2^+	— 2^+	— 4^+
$\langle l_1 0_1 2_1^+ $	$\langle l_1 2_2 0_1^+ $	$\langle l_1 4_1 0_1^+ $

Fig. 29



Fig.30

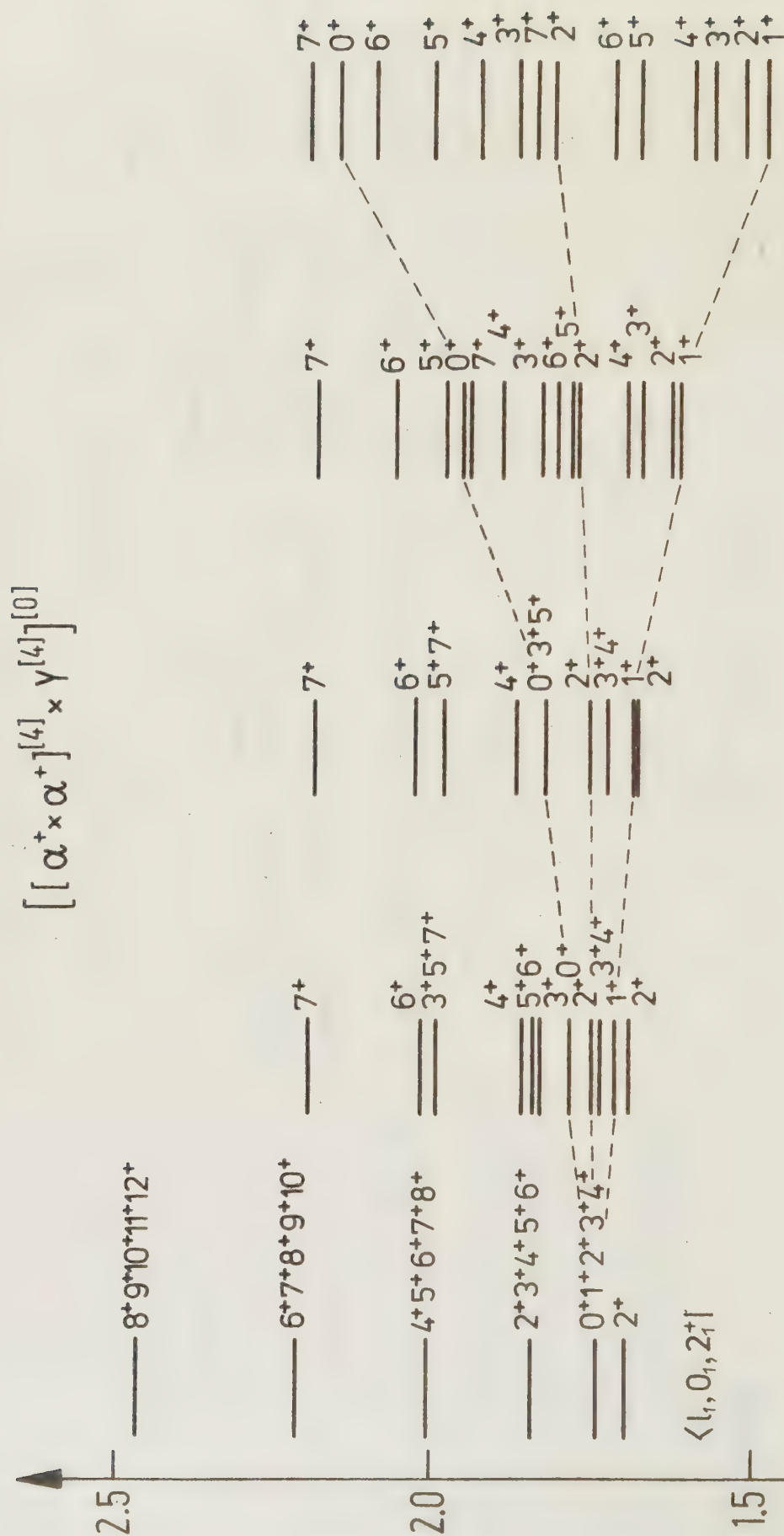


Fig. 31

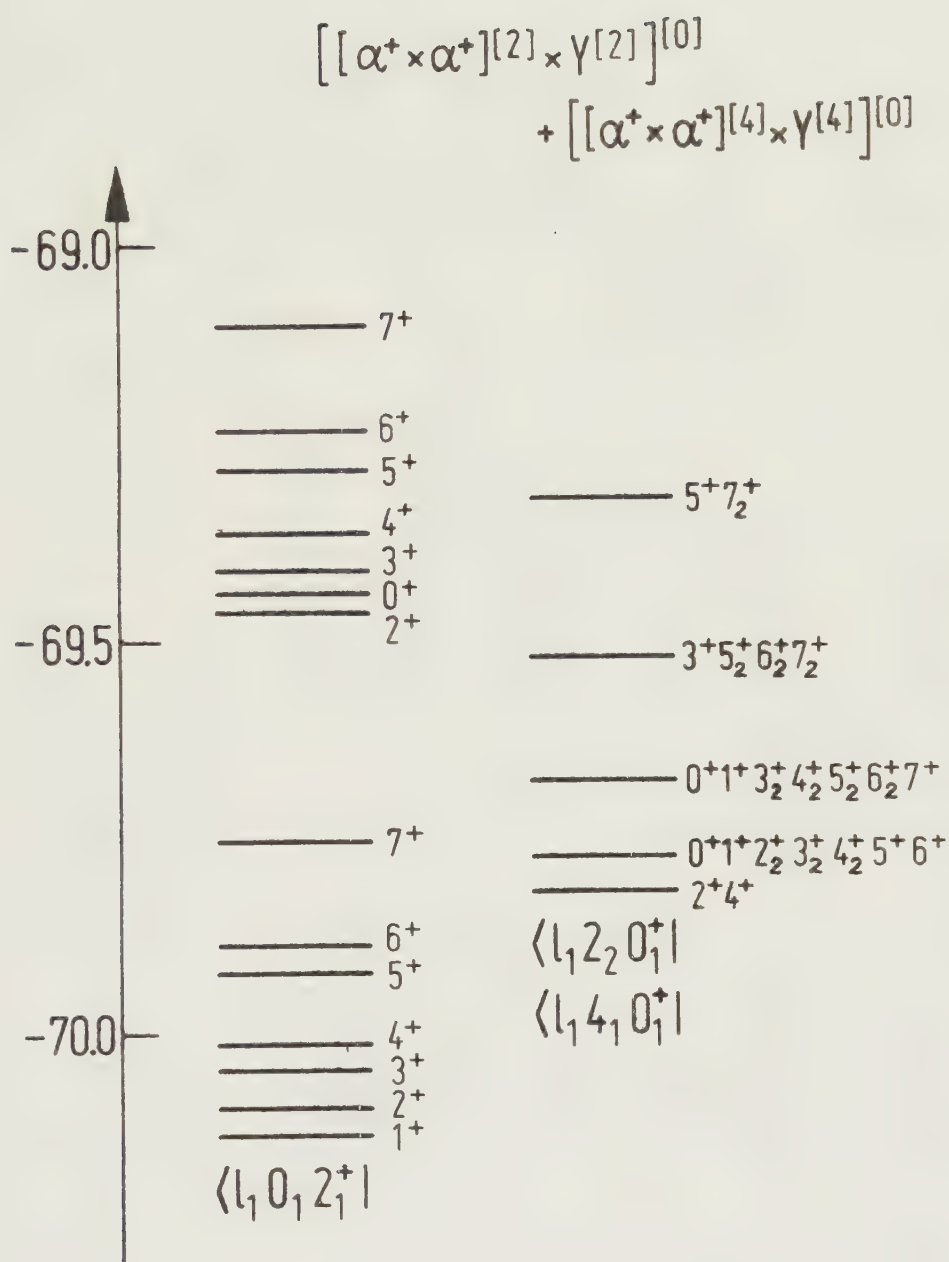


Fig.32



Fig.33

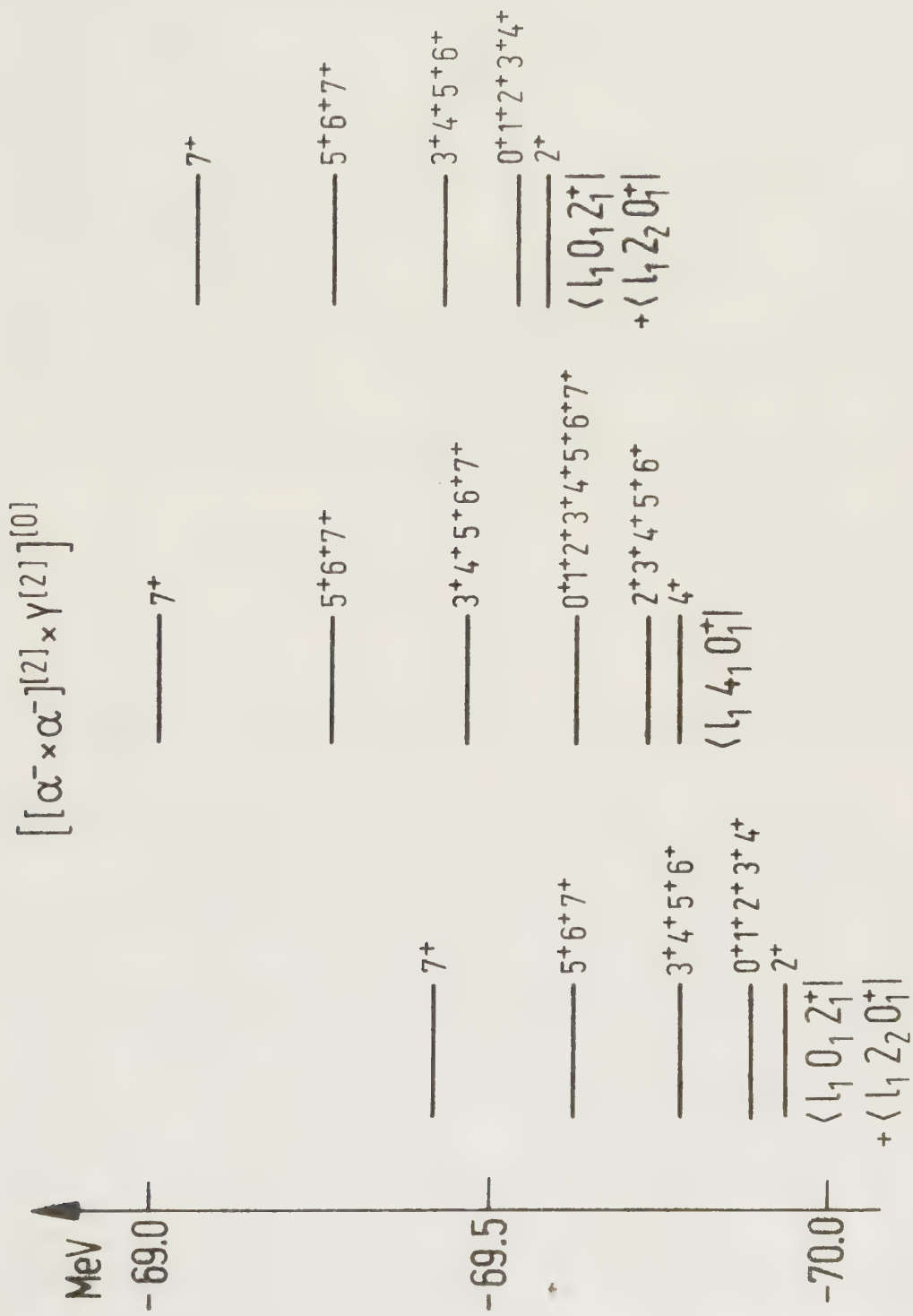


Fig.34

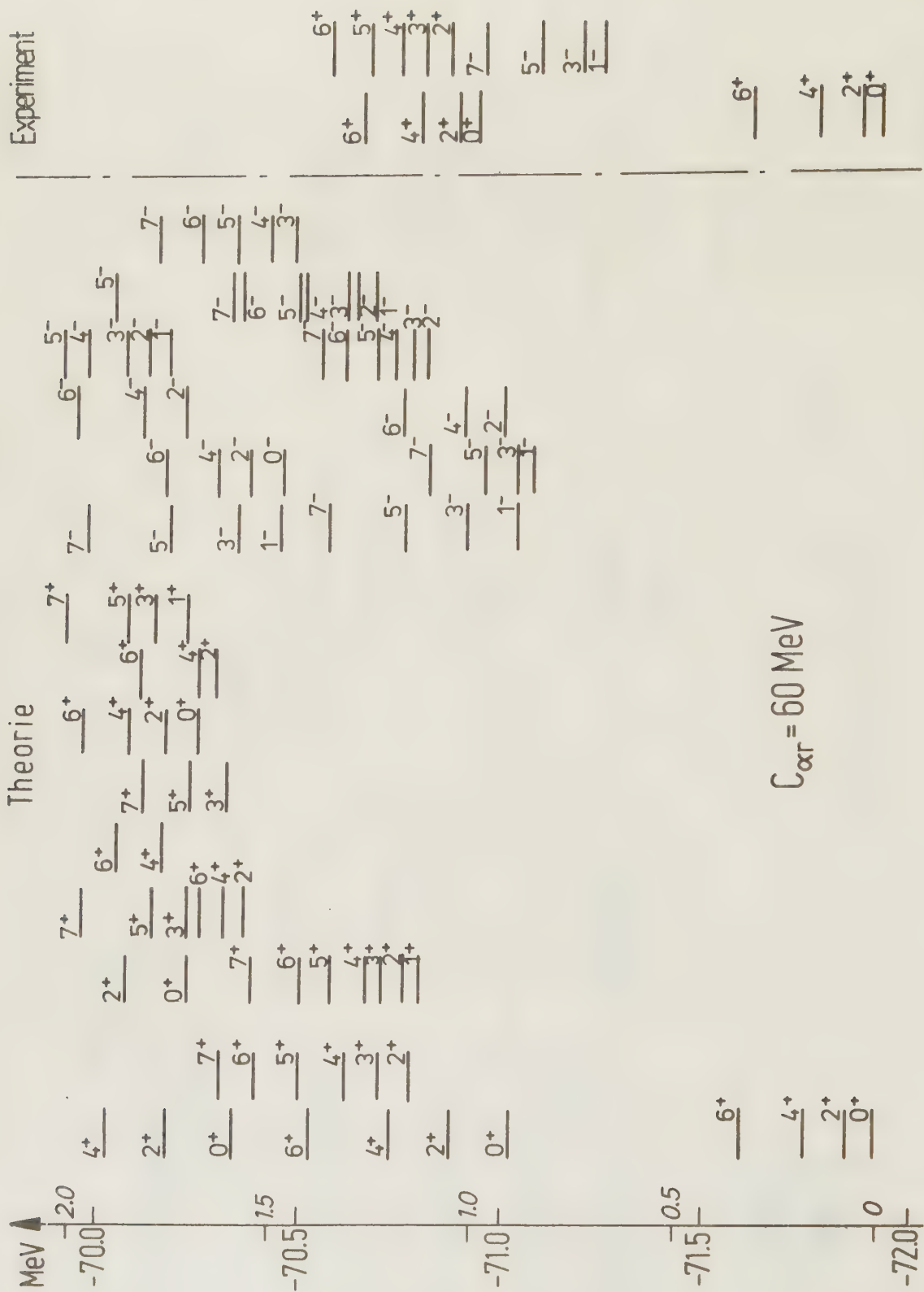


Fig.35

Literaturverzeichnis

- (1) Bohr, A.: Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk.26, No.14(1952)
Bohr, A., Mottelson, B.R.: Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk.
27, No.16(1953)
- (2) Faessler, A., Greiner, W.: Z.Physik 168, 425(1962)
Faessler, A., Greiner, W., Sheline, R.: Nucl.Phys.70, 33(1965)
Eisenberg, J.M., Greiner, W.: Nuclear Theory, Vol.1,
North-Holland Publ.Comp.
Amsterdam, 1970
- (3) Davydov, A.S., Fillipov, G.F.: Nucl.Phys.8, 237(1958)
- (4) Gneuß, G.: Dissertation, Universität Ffm (1970)
Gneuß, G., Greiner, W.: Nucl.Phys.171, 449(1971)
Gneuß, G., Mosel, U., Greiner, W.: Phys.Lett.30B, 397(1969)
- (5) Kumar, K., Baranger, M.: Nucl.Phys.A92, 608(1967)
Kumar, K.: Nucl.Phys.A92, 653(1967)
Baranger, M., Kumar, K.: Nucl.Phys.A122, 241(1968)
Kumar, K., Baranger, M.: Nucl.Phys.A122, 273(1968)
- (6) Hess, P.: Diplomarbeit, Universität Ffm (1978)
Hess, P., Greiner, W.: Scottish Universities Summer School in
Physics (1977) to be published
- (7) Chacón, E., Moshinsky, M.: Journ.of Math.Phys.18, No 5(1977)
- (8) Kappatsch, A.: Dissertation, Universität Ffm (1974)
- (9) Donner, W., Greiner, W.: Zeitschrift für Physik 197, 440(1966)
- (10) Sedelmayr, M.: Dissertation Universität Ffm(1976)
Sedelmayr, R.: Dissertation Universität Ffm(1976)
- (11) Maruhn, J., Greiner, W.: Z.Physik 251, 431(1972)
Fink, H.J., Greiner, W. et al: Proc.of the Int.Conf. on
Reacts.betw.Complex Nuclei, Nashville 1974,
North-Holland Publ.Comp., Amsterdam, p.21
Fink, H.J., Greiner, W. et al: Proc.of the Int.Summer School
on Nucl.Physics, Predeal 1974, p.75
Gupta, R.K.: Particles and Nuclei 8 no.4(1977)
Lichtner, P., Drechsel, D., Maruhn, J., Greiner, W.: Phys.Lett.
45b, 175(1973)
Maruhn, J., Greiner, W.: Phys.Rev.Lett. 32, 548(1974)
Fink, H.J., Maruhn, J., Scheid, W., Greiner, W.: Z.Phys.268,
321(1974)
- (12) Krause, O.: Dissertation, Universität Ffm (1976)
- (13) Hecht, K.T.: Nucl.Phys.63, 177(1965)
- (14) Grosse, E., de Boer, J., Diamond, R., M., Stephens, F., S., Tjom, P.:
Phys.Rev.Lett.35, 565(1975)
- (15) Specht, H.J.: Rev.Mod.Physics 46 no.4(1974)
- (16) Zintro, N., Cocu, F., Fieni, J.M., Holub, E.: to be published,
Journal of Physics.

- (17) Fabian, W.: Diplomarbeit, Universität Ffm (1971)
- (18) Fink, H.J.: Dissertation, Universität Ffm (1973)

Figurenbeschreibung

- Fig. 1 Die Bedeutung der Koordinaten.
- Fig. 2 Die Parität der $\alpha_\mu^{[2]}$ bei verschobenem Ursprung.
- Fig. 3 Darstellung der Symmetrie (B 10).
- Fig. 4 Bedeutung der Koordinaten α^+, α^- .
- Fig. 5 Das Potential der Massenasymmetriekoordinate.
- Fig. 6 Zustände der Massenasymmetriekoordinate in einem Potential mit drei Minima.
- Fig. 7a Potentialfläche zu ^{192}Os .
- Fig. 7 Das Spektrum von ^{192}Os .
- Fig. 8 Grund-, Gamma- und Betabande von ^{192}Os gegen $I \times (I+1)$ aufgetragen.
- Fig. 9 Potentialfläche mit zwei Minima.
- Fig. 10 Spektrum zu 9.
- Fig. 11 Backbending Plot zu 10.
- Fig. 12a Potentialfläche zu ^{238}U .
- Fig. 12 Das Spektrum von ^{238}U .
- Fig. 13 Darstellung des Potentials $C_{\alpha r}$ im intrinsischen System.
- Fig. 14 Das Spektrum zweier vektoriell gekoppelter Rotations-Grundbanden.
- Fig. 15 Das Spektrum zweier gekoppelter Rotatoren unter dem Einfluß der Potentiale C_{12} und $C_{\alpha r}$.
- Fig. 16, 17, 18 Studie zur Konstruktion der Basis für die Koordinaten α^+, α^- und r .
- Fig. 19 Vordagonalisierte Spektren für die α^+, α^- und $\vec{r}$ -Bewegung.
- Fig. 20 Die Basis, welche mit den Zuständen aus Fig. 19 konstruiert wurde.
- Fig. 21 Ergebnis der Diagonalisierung des Kopplungsterms C_1 in der Basis aus Fig. 20.
- Fig. 22 Potential zur Vordagonalisierung der Radialbewegung.
- Fig. 23 Potential zur Vordagonalisierung der α^- -Bewegung.
- Fig. 24 Basis, welche aus den vordagonalisierten Zuständen aus Fig. 18 konstruiert wurde.
- Fig. 25 Die Zustände negativer Parität unter dem Einfluß des Kopplungsterms C_1 .
- Fig. 26 Aufgliederung der Zustände aus Fig. 25 in Banden.
- Fig. 27 Der Einfluß des Terms C_3 auf die gleichen Zustände.
- Fig. 28 Der Einfluß des Potentials C .
- Fig. 29 Die drei untersten Banden positiver Parität.

- Fig.30 Der Einfluß des Terms C_2 auf die Zustände positiver Parität.
- Fig.31 Der Einfluß von C_2 auf die Bande $\langle 1_1, 0_1, 2_1^+ |$.
- Fig.32 Der Einfluß der Terme C_1 und C_2 .
- Fig.33 Der Einfluß des Terms C_3 .
- Fig.34 Aufteilung der Zustände aus Fig.33 in Banden.
- Fig.35 Das gesamte Spektrum für $C_{\alpha r} = 60$ Mev im Vergleich mit ^{238}U .

Lebenslauf

Am 6.2.1948 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Friedrich Alexander von Bernus und dessen Ehefrau Renata geb. von Grunelius in Bad Soden/Ts geboren. Ostern 1954 wurde ich in Frankfurt eingeschult und wechselte 1958 zum Lessing - Gymnasium ebenfalls in Frankfurt. Im November 1966 machte ich dort Abitur und begann das Physikstudium im Wintersemester 1966/67 an der J.W.Goethe Universität. Nach einer halbjährigen Unterbrechung durch die Wehrdienstzeit vom 3.4.1967 bis zum 15.10.67 nahm ich dort das Studium wieder auf und legte am 26.4.69 die Diplom-Vorprüfung für Physiker ab. Während des Wintersemesters 1969/70 studierte ich in München an der Maximilian Universität. Meine Diplomarbeit begann ich im April 1970 in Frankfurt/M am Institut für theoretische Physik und bestand am 25.11.1971 die Diplomprüfung. Die Diplomarbeit und die Dissertation entstanden unter der Leitung von Professor Dr.W.Greiner.

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren

Martienssen, Queisser, Süßmann, Heineken, Doiwa, Franz, Mrowka, Köthe, Schopper, Arenhövel, Royen, Drechsel, Dürr, de Boer, Greiner.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Greiner bin ich zu großem Dank für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit verpflichtet.

Herrn Prof. Dr. Scheid sei gedankt für die vielen hilfreichen Diskussionen und Ratschläge.

Mein Dank gilt ferner den Kollegen vom Institut für Theoretische Physik, insbesondere Axel Kappatsch, Hans Joachim Fink, Olaf Krause und Horst Stock, mit denen ich viele nützliche Gespräche führen konnte.

Frau Utschig möchte ich für die Anfertigung der Bilder und Herrn Brose für den Druck der Arbeit danken.

Die numerischen Rechnungen wurden an der Maschine der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt und im Hochschulrechenzentrum in Frankfurt durchgeführt. Den Angestellten der GSI sei für ihre Hilfe gedankt.

